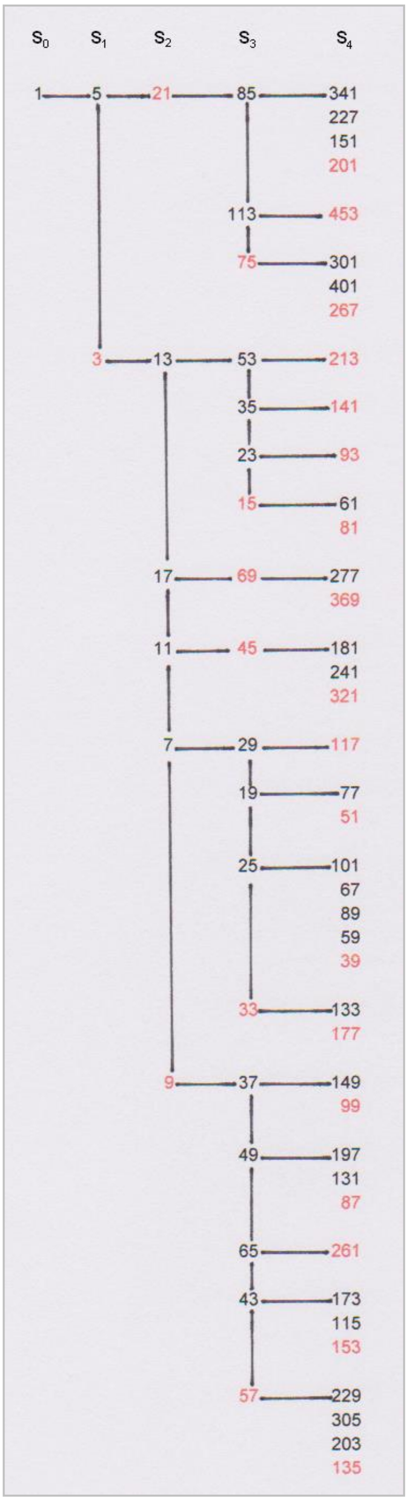
Die Konstruktion der speziellen Baumstruktur

von Mike Winkler
19.05.2010

Das Konstruktionsprinzip der speziellen Baumstruktur



Für alle ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Folge bei 1 endet, soll ein Graph konstruiert werden, der die Collatz-Iteration rückwärts verfolgt. Der so genannte ungerade Collatz-Baum. Für dessen Konstruktion wählen wir eine quadratische Gitterstruktur, so dass die Äste nur waagerecht und senkrecht angeordnet sind.

Die Menge der ungeraden Zahlen teilt sich modulo 3 in die Restklassen 1, 2 und 0. Wir definieren die Zahlen der Restklasse 0, also die Vielfachen von 3, als die Blätter des ungeraden Collatz-Baumes. Für eine bessere Übersicht sind diese rot geschrieben.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Collatz-Bäumen (siehe z. B. im Wikipedia Eintrag), werden wir hier die Blätter in den Baum integrieren, so dass auch diese eine Fortleitung besitzen. Die eigentliche Iterations-Folge der ungeraden Zahlen wird dadurch nicht verfälscht. Möchte man diese rekonstruieren, müssen lediglich die Blätter auf dem Weg zur 1 übersprungen werden.

Wir beginnen den Baum oben links mit der 1 und konstruieren ihn dann nach rechts und unten weiter. Dabei besitzt jede ungerade Zahl a_n eine Fortleitung nach rechts, gegeben durch $a_{n+1} = 4a_n+1$. Jedoch nur die ungeraden Zahlen der Restklasse 1 und 2 besitzen eine Fortleitung nach unten. Der Begriff *Fortleitung* entspricht einer *gerichteten Kante* im Sinne der Graphentheorie. Dadurch erhält der Baum eine Dreiecks-Struktur, weil die Äste nach unten bei jedem Blatt nur nach rechts verzweigen. Der einzige Nachteil dieser Struktur liegt in ihrer Darstellung. Wachstumsbedingt wird der Baum mit jeder weiteren Spalte (S_0, S_1, S_2, …) um das Dreifache nach unten gestreckt.

Das Konstruktionsprinzip des ungeraden Baumes lässt sich wie folgt formulieren. Die Pfeile geben dabei die Konstruktionsrichtung für a_{n+1} nach rechts und unten an.

$$a_{n+1} = \begin{cases} 4a_n + 1 & \text{für } a_n \equiv 1 \bmod 2 \quad (\rightarrow) \\ \dfrac{4a_n - 1}{3} & \text{für } a_n \equiv 1 \bmod 3 \quad (\downarrow) \\ \dfrac{2a_n - 1}{3} & \text{für } a_n \equiv 2 \bmod 3 \quad (\downarrow) \end{cases}$$

Das Bild links zeigt die ersten fünf Spalten des ungeraden Collatz-Baumes, konstruiert nach dem vorgestellten Prinzip. Durch die Dreiecks-Struktur des Baumes ist die Anzahl an Zahlen in jeder Spalte begrenzt. Über sechs Spalten erstreckt sich der Baum in normaler Textgröße bereits über zweieinhalb Seiten. (siehe diesen Link)

Regeln für benachbarte Zahlen im Baum (Nachbarschaftsregeln)

Die Collatz-Iteration für eine ungerade Zahl a ist gegeben durch $\frac{3a+1}{2}$. Ist das Ergebnis eine gerade Zahl, wird diese so lange halbiert bis wieder eine ungerade Zahl erreicht ist. Aus der Collatz-Iteration lassen sich nun die folgenden Regeln für benachbarte Zahlen im Baum herleiten. Es seien a und x ganze Zahlen mit a > 1 und x ≥ 0.

Für die waagerechten Äste gilt:

Jede Zahl a der Form 2x+1 besitzt einen größeren rechten Nachbar gegeben durch $4a+1$.

Beweis: Die Collatz-Iteration für a = 2x+1 liefert $\frac{3\cdot(2x+1)+1}{2} = 3x+2 \cdot$

$4a+1$ mit $a = 2x+1$ ergibt $4\cdot(2x+1)+1 = 8x+5\,(\text{ungerade}) > 2x+1$ für alle $x \in IN_0 \cdot$

Die Collatz-Iteration für a = 8x+5 liefert

$$\frac{3\cdot(8x+5)+1}{2} = 12x+8\,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{12x+8}{2} = 6x+4\,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{6x+4}{2} = 3x+2 \cdot$$

Jede Zahl a der Form 8x+5 besitzt einen kleineren linken Nachbar gegeben durch $\frac{a-1}{4}$.

Beweis: $\frac{a-1}{4}$ mit $a = 8x+5$ ergibt $\frac{(8x+5)-1}{4} = 2x+1\,(\text{ungerade}) < 8x+5$ für alle $x \in IN_0 \cdot$

Für die senkrechten Äste gilt:

Jede Zahl a der Form 6x+1 besitzt einen größeren unteren Nachbar gegeben durch $\frac{4a-1}{3}$.

Beweis: $\frac{4a-1}{3}$ mit $a = 6x+1$ ergibt $\frac{4\cdot(6x+1)-1}{3} = 8x+1\,(\text{ungerade}) > 6x+1$ für alle $x \in IN_0 \cdot$

Die Collatz-Iteration für a = 8x+1 liefert $\frac{3\cdot(8x+1)+1}{2} = 12x+2\,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{12x+2}{2} = 6x+1 \cdot$

Jede Zahl a der Form 6x+5 besitzt einen kleineren unteren Nachbar gegeben durch $\frac{2a-1}{3}$.

Beweis: $\frac{2a-1}{3}$ mit $a = 6x+5$ ergibt $\frac{2\cdot(6x+5)-1}{3} = 4x+3\,(\text{ungerade}) < 6x+5$ für alle $x \in IN_0 \cdot$

Die Collatz-Iteration für a = 4x+3 liefert $\frac{3\cdot(4x+3)+1}{2} = 6x+5 \cdot$

Jede Zahl a der Form 24x+25 besitzt einen kleineren oberen Nachbar gegeben durch $\frac{3a+1}{4}$.

Beweis: Die Collatz-Iteration für a = 24x+5 liefert

$$\frac{3\cdot(24x+25)+1}{2} = 36x+38\,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{36x+38}{2} = 18x+19\,(\text{ungerade}) < 24x+25 \text{ für alle } x \in IN_0 \cdot$$

Jede Zahl a der Form 24x+17 besitzt einen kleineren oberen Nachbar gegeben durch $\frac{3a+1}{4}$.

Beweis: Die Collatz-Iteration für a = 24x+17 liefert

$$\frac{3\cdot(24x+17)+1}{2} = 36x+26\,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{36x+26}{2} = 18x+13\,(\text{ungerade}) < 24x+17 \text{ für alle } x \in IN_0 \cdot$$

Für die Blätter mit Fortleitung nach oben gilt:

Jede Zahl a der Form 12x+3 besitzt einen größeren oberen Nachbar gegeben durch $\frac{3a+1}{2}$.

Beweis: Die Collatz-Iteration für a = 12x+3 liefert $\frac{3\cdot(12x+3)+1}{2} = 18x+5\,(\text{ungerade}) > 12x+3$ für alle $x \in IN_0$.

Jede Zahl a der Form 24x+9 besitzt einen kleineren oberen Nachbar gegeben durch $\frac{3a+1}{4}$.

Beweis: Die Collatz-Iteration für a = 24x+9 liefert

$$\frac{3\cdot(24x+9)+1}{2} = 36x+14\,(\text{gerade}) \Rightarrow \frac{36x+14}{2} = 18x+7\,(\text{ungerade}) < 24x+9 \text{ für alle } x \in IN_0 .$$

Die Zahlen der Form 24x+5, 24x+13 und 24x+21 sind enthalten in den Zahlen der Form 8x+5.
Die Zahlen der Form 12x+7, 24x+13 und 24x+25 sind enthalten in den Zahlen der Form 6x+1.
Die Zahlen der Form 12x+11, 24x+5 und 24x+17 sind enthalten in den Zahlen der Form 6x+5.

Die neun Nachbarschafts-Teilgraphen

Aus den Nachbarschaftsregeln ergeben sich neun verschiedene mögliche Nachbarschafts-Teilgraphen die eine ungerade Zahl in der Baumstruktur besitzen kann. Die neun Formen 12x+3, 12x+7, 12x+11, 24x+5, 24x+9, 24x+13, 24x+17, 24x+21 und 24x+25 bilden für die ganzen Zahlen $x \geq 0$ die Menge der ungeraden Zahlen > 1. Gemäß den Nachbarschaftsregeln kann jede ungerade Zahl nur genau einen Teilgraphen besitzen.

1)
$$\begin{array}{ccc} 18x+5 & & \\ | & & \\ 12x+3 & - & 48x+13 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ccc} 18x+7 & & \\ | & & \\ 24x+9 & - & 96x+37 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{ccccc} 6x+5 & - & 24x+21 & - & 96x+85 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{ccc} 18x+17 & & \\ | & & \\ 12x+11 & - & 48x+45 \\ | & & \\ 8x+7 & & \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{ccc} 18x+13 & & \\ | & & \\ 24x+17 & - & 96x+69 \\ | & & \\ 16x+11 & & \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{ccccc} 6x+1 & - & 24x+5 & - & 96x+21 \\ & & | & & \\ & & 16x+3 & & \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{ccc} 18x+11 & & \\ | & & \\ 12x+7 & - & 48x+29 \\ | & & \\ 16x+9 & & \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{ccc} 18x+19 & & \\ | & & \\ 24x+25 & - & 96x+101 \\ | & & \\ 32x+33 & & \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{ccccc} 6x+3 & - & 24x+13 & - & 96x+53 \\ & & | & & \\ & & 32x+17 & & \end{array}$$

Die sechs Formen der Fortleitungen nach oben (18x+5, 18x+7, usw.) bilden für die ganzen Zahlen $x \geq 0$ die Menge der ungeraden Zahlen > 3 ohne die Zahlen der Form 6x+3.

Die drei Formen der Fortleitungen nach links (6x+5, 6x+1 und 6x+3) bilden für die ganzen Zahlen $x \geq 0$ die Menge der ungeraden Zahlen > 0.

Die sechs Formen der Fortleitungen nach unten (8x+7, 16x+11, usw.) bilden zusammen mit den neun Formen der Fortleitungen nach rechts (48x+13, 96x+37, usw.) für die ganzen Zahlen $x \geq 0$ die Menge der ungeraden Zahlen > 5.

Die Formen der Nachbarzahlen (farbig unterstrichen) lassen sich den neun Ausgangsformen (12x+3, 24x+9, usw.) zuordnen. Eine gleiche Farbe symbolisiert die Zugehörigkeit zu einer gleichen Gruppe von Formen.

Die Zahlen der Form 18x+5, 18x+17, 18x+11 und 6x+5 sind enthalten in den Zahlen der Form 12x+11, 24x+17 und 24x+5.

Die Zahlen der Form 18x+7, 18x+13, 18x+19 und 6x+1 sind enthalten in den Zahlen der Form 12x+7, 24x+25 und 24x+13.

Die Zahlen der Form 6x+3 sind enthalten in den Zahlen der Form 12x+3, 24x+9 und 24x+21.

Die Zahlen der Form 48x+13, 96x+37 und 96x+85 sind enthalten in den Zahlen der Form 24x+13.

Die Zahlen der Form 48x+45, 96x+69 und 96x+21 sind enthalten in den Zahlen der Form 24x+21.

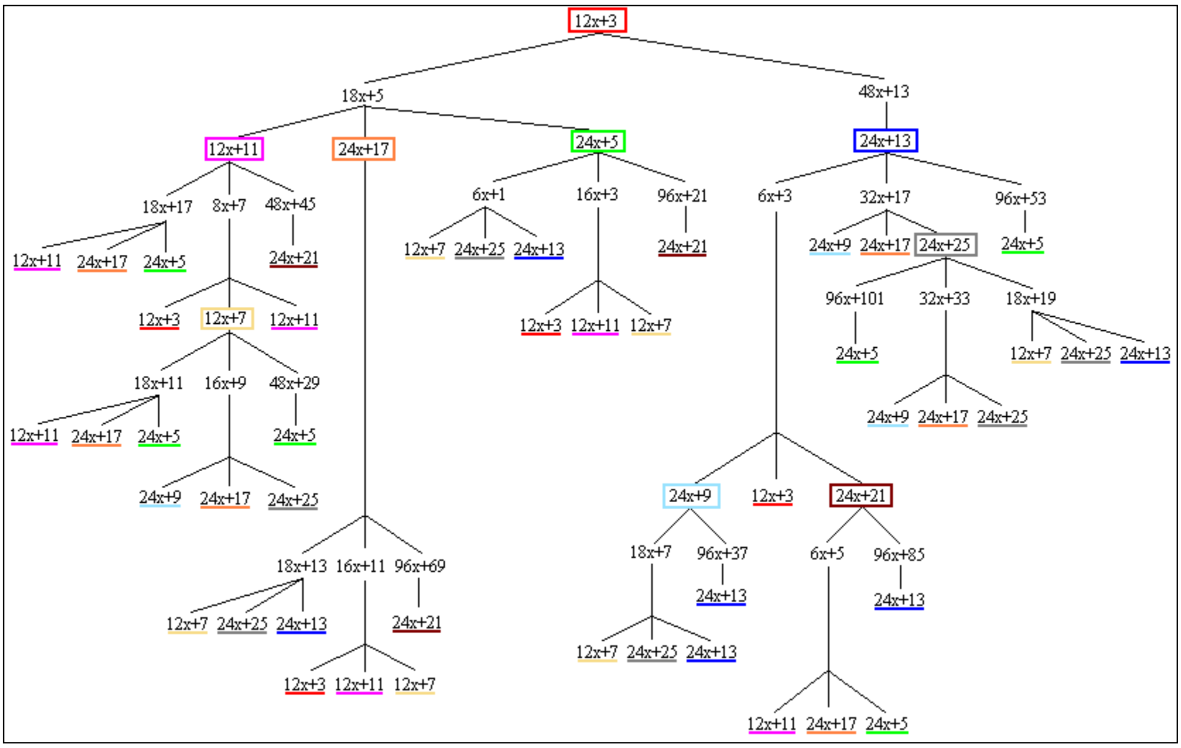
Die Zahlen der Form 48x+29, 96x+101 und 96x+53 sind enthalten in den Zahlen der Form 24x+5.

Die Zahlen der Form 8x+7, 16x+11 und 16x+3 sind enthalten in den Zahlen der Form 12x+3, 12x+11 und 12x+7.

Die Zahlen der Form 16x+9, 32x+33 und 32x+17 sind enthalten in den Zahlen der Form 24x+9, 24x+17 und 24x+25.

Der zusammenhängende Graph der neun Nachbarschafts-Teilgraphen

Wir können nun aus den neun Nachbarschafts-Teilgraphen einen zusammenhängenden Graphen bilden. Er beginnt mit der Form 12x+3, könnte aber auch mit jeder der anderen acht Ausgangsformen begonnen werden. Relevant ist nur, dass sich die neun Ausgangsformen je einmal in den Ästen finden (Kästchen) und jedes der 46 Blätter (unterstrichen) wieder einer dieser Ausgangsformen entspricht. So kann von jedem Blatt wieder zur gleichen Form in den Ästen weitergeleitet werden. Gleiche Farben kennzeichnen gleiche Formen. Die Farbgebung hat jedoch keinen Bezug zur zuvor verwendeten Farbgebung. Im Prinzip erscheint dieser zusammenhängende Graph nur deshalb als Baum, da für eine bessere Übersicht auf die Wege zwischen den 46 Blättern und den neun entsprechen Formen in den Ästen verzichtet wurde. Somit erhalten wir ein vollständig in sich geschlossenes Formensystem der ungeraden Zahlen in der Baumstruktur. (siehe auch Anhang 6)



Schlussfolgerungen

Die Fortleitungen der neun Nachbarschafts-Teilgraphen nach rechts sind immer größer. Die Fortleitungen nach links, oben und unten lassen jedoch folgende Entwicklung erkennen. Zwei Drittel der Blätter besitzt eine Fortleitung zu einer kleineren Zahl (in Richtung nach links oben) und von den restlichen Zahlen führen sieben Fortleitungen zu einer kleineren (davon vier nach links oben), aber nur fünf (davon zwei nach links oben) zu einer größeren Zahl. Das bedeutet, dass die Zahlen statistisch betrachtet immer kleiner werden müssen.

Würde die Collatz-Folge für eine ungerade Zahl über alle Grenzen wachsen oder in einen Zyklus geraten, dann wären die betroffenen Zahlen nicht in dem Baum der bei 1 beginnt enthalten. In beiden Fällen würden unendlich viele Zahlen fehlen. Doch auch für diese Zahlen müssen die Nachbarschaftsregeln gelten, da diese direkt aus der Collatz-Iteration folgen.

Würde die Collatz-Folge für eine ungerade Zahl in einen Zyklus geraten, müsste sich aus der unendlichen Menge der zugehörigen Nachbarschafts-Teilgraphen ein Graph bilden lassen, der einen Kreis enthält.

Würde die Collatz-Folge für eine ungerade Zahl über alle Grenzen wachsen, müsste sich aus der unendlichen Menge der zugehörigen Nachbarschafts-Teilgraphen ein Graph bilden lassen, der nach rechts, oben und unten unendlich groß würde. Die Spalte ganz links in diesem ungeraden Collatz-Graph müsste dabei ganz aus Zahlen mit den Nachbarschafts-Teilgraphen 1) 2) 4) 5) 7) 8) aufgebaut sein.