Der schrittweise Aufbau der zusammenhängenden Struktur des Baumes

von Mike Winkler
29.06.2010

Wenn wir den ungeraden Zahlen der Reihe nach ihren Platz in der Baumstruktur zuweisen, so bildet sich ab bestimmten Zahlen S_n eine immer größere, zusammenhängende Struktur heraus, welche lückenlos zur 1 führt. Dabei kann der bereits bestehende Zusammenhang entweder von S_n als einzelner Zahl oder durch einen weiteren Verbund zusammenhängender Zahlen (eine bis endlich viele), der noch keine Verbindung zur 1 besitzt, ergänzt werden. Letzteres geschieht durch Schließen der Lücke mit S_n zwischen beiden Verbunden.

Wir erhalten den ersten Zusammenhang mit S_1=5, da die 5 die Lücke zwischen der 1 und der 3 schließt. Der weitere Zusammenhang ergibt sich mit S_2=13, welche sich dem bestehenden Verbund anschließt. Mit S_3=17 wird dann die Lücke zwischen dem Verbund der Zahlen 7, 9 und 11 geschlossen. Der Zusammenhang besteht jetzt aus den Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17. Von diesen acht Zahlen kann man zur 1 gelangen ohne dabei eine Zahl > 17 zu passieren. Die nächste Zahl ist S_4=21, welche sich wieder anschließt. Mit S_5=29 wird die Lücke zwischen dem Verbund aus 19 und 25 geschlossen, usw. (vgl. Anhang 2)

Die Zahlen S_n bilden die Folge 5, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 45, 49, 53, 61, 65, 69, 77, 81, 85, 93, 101, 113, 117, 133, 141, 149, 157, 173, 177, 181, 197, 205, 209, 213, 229, 237, 241, 245, 261, 269, 273, 277, 289, 301, …

Diese Zahlen sind ausschließlich von der Form 24x+5, 24x+9, 24x+13, 24x+17, 24x+21 und 24x+25. Das nur diese sechs Formen der neun Nachbarschafts-Teilgraphen am Aufbau des Zusammenhangs beteiligt sind liegt daran, dass nur diese Formen einen kleineren linken oder einen kleineren oberen Nachbarn besitzen, also in Richtung zur eins hin kleiner werden. (vgl. Seite 3 bzw. Anhang 5)

Auffällig ist, dass in S_n alle Zahlen der Form 9x+16 fehlen, also 9, 25, 41, 57, 73, 89, …, alles Zahlen der Formen 24x+9, 24x+17 und 24x+25.

Ordnen wir den Zahlen S_n den x-Wert des entsprechenden Nachbarschafts-Teilgraphen zu erhalten wir die Folge 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11 ,11 ,11, …

Für die ersten 182 Zahlen ist jeder x-Wert mindestens einmal enthalten. Der erste x-Wert, der nicht enthalten ist, ist x=74. Auf S_{182} = 1773=73·24+21 folgt S_{183} = 1805=75·24+5. Im weiteren Verlauf der Folge treten in gewisser Regelmäßigkeit immer wieder solche Lücken in den x-Werten auf. Diese Lücken, welche anscheinend beliebig groß werden können, sind jedoch selten. Meist bleiben die x-Werte gleich oder erhöhen sich um eins.

Auffällig ist, dass kein x-Wert in der Folge sechsmal vertreten ist, also in allen sechs Formen enthalten ist. Dieses Verhalten liegt in dem Fehlen der Zahlen der Form 9x+16 begründet. Für die Verteilung im Baum bedeutet dies, dass in einem Zahlenbereich von sechs aufeinander folgenden ungeraden Zahlen mit Abstand vier höchstens fünf davon in der Nähe des bereits bestehenden Zusammenhangs zu finden sind.

Interessant ist das Verhalten des Quotienten $\frac{S_n}{n}$ für n gegen Unendlich. Er scheint gegen einen Grenzwert zu konvergieren, der bei knapp unter 7 liegt. (siehe Tabelle auf der nächsten Seite) Wir definieren $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = G$

Um G besser zu verstehen, vergleichen wir ihn mit dem Grenzwert einer weiteren Folge T_n. T_n sei gegeben durch die Zahlen der Form 4x+1 ohne die Zahlen der Form 9x+16, also 5, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 45, 49, 53, 61, 65, 69, 77, 81, 85, 93, 97, 101, 109, 113, 117, 125, 129, 133, 141, 145, 149, 157, 161, 165, 173, 177, 181, …

S_n ist somit Teilfolge von T_n. Der Grenzwert von $\frac{T_n}{n}$ lässt sich genau bestimmen. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{16}{3}$.

Da T_n etwas mehr Zahlen als S_n besitzt, können wir G spezifizieren. Es gilt $G = \frac{16}{c}$ mit 2 < c < 3.

Die Zahlen aus T_n, die nicht in S_n enthalten sind, bilden die Folge U_n mit 97, 109, 125, 129, 145, 161, 165, 189, 193, 221, 225, 253, 257, 285, 293, 333, 337, 353, 365, 381, 389, 413, 417, 429, 437, 445, 449, 481, 485, 501, …

Die Zahlen U_n gehören zu den Zahlen, deren x-Wert in der Folge S_n fehlt. Die Zahlen U_n liegen bis zu einer gegebenen oberen Grenze fern ab des Zusammenhangs bis zu eben dieser Grenze. Teilweise bilden die Zahlen U_n sogar einen eigenen lokalen Zusammenhang. An dem Baum im Anhang 2 lässt sich erkennen, dass sich bis zu einer Grenze von 341 der bestehende Zusammenhang bis zur Spalte S_6 und bis zur Zeile Z_{15} erstreckt. Die Zahlen U_n finden sich im unteren, rechten Viertel des Baumes zwischen den Spalten S_8 bis S_{10} und den Zeilen Z_{37} bis Z_{44}.

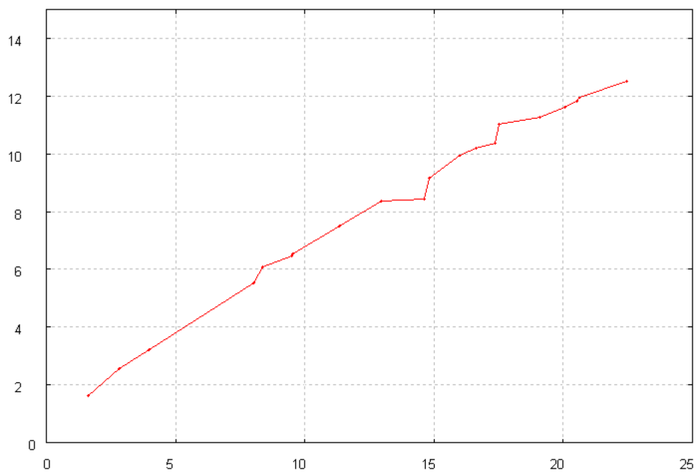
Die Existenz von G würde bedeuten, dass der Zusammenhang des ungeraden Collatz-Baumes in großen Zahlenbereichen in regelmäßigen, gleichen Abständen wächst, was das Fehlen von unendlich vielen Zahlen im Baum, verursacht durch die Existenz einer zyklischen oder divergenten Collatz-Folge, ab einem gewissen, großen Zahlenbereich ausschließen würde.

Der Zusammenhang aller ungeraden Zahlen von 1 bis a_k

Berücksichtigen wir beim schrittweisen Aufbau des Zusammenhangs die Vollständigkeit der ungeraden Zahlen von 1 bis a_k, reduziert sich die Folge S_n auf die Zahlen Z_k. Z_k ist also Teilfolge von S_n. Der erste Zusammenhang aller ungeraden Zahlen von 1 bis a_1=5 ist gegeben ab der Zahl Z_1=5. Der nächste vollständige Zusammenhang ergibt sich ab Z_2=17 von 1 bis a_2=13. Ab Z_3=53 befinden sich alle ungeraden Zahlen von 1 bis a_3=25 in einem lückenlosen Verbund mit der 1, usw. Die untere Tabelle gibt dazu eine Übersicht. Bis zur Zahl Z_4=3077 lässt sich der Zusammenhang auch mit dem Baum im Anhang 2 überprüfen.

Die Zahlen Z_k sind ausschließlich von der Form 24x+5 und 24x+17, weil dies die einzigen Formen sind, deren Nachbarn nach links und unten bzw. nach oben und unten kleiner werden. (vgl. Seite 3 bzw. Anhang 5)

k	Z_k	a_k	x von Z_k=24x+m	m von Z_k=24x+m	n von $S_n = Z_k$	$\frac{Z_k}{n} = \frac{S_n}{n}$	$\frac{Z_k}{a_k}$	$\frac{x}{a_k}$	$\frac{x}{a_k}$ gerundet
1	5	5	0	5	1	5	1	/	/
2	17	13	0	17	3	5.66667	1.31	/	/
3	53	25	2	5	10	5.3	2.12	0.08	1
4	3077	253	128	5	306	10.0556	12.16	0.51	1
5	4373	445	182	5	506	8.64229	9.83	0.41	1
6	13121	637	546	17	1796	7.30568	20.60	0.86	1
7	13841	701	576	17	1897	7.29626	19.74	0.82	1
8	83501	1817	3479	5	11823	7.06259	45.96	1.91	1
9	425645	4253	177305	5	61070	6.96979	100.08	41.69	41
10	2270045	4589	94585	5	325976	6.96384	494.67	20.61	21
11	2717873	9661	113244	17	390304	6.96348	281.32	11.72	11
12	9038141	20893	376589	5	1297206	6.96739	433.71	18.02	19
13	16714421	26621	696434	5	2397148	6.97263	627.87	26.16	27
14	35452673	31909	1477194	17	5080664	6.97796	1111.06	46.29	47
15	40337621	60973	1680734	5	5779864	6.97899	661.57	27.57	27
16	197759717	77669	8239988	5	28324819	6.98185	2546.19	106.09	107
17	523608245	113381	21817010	5	74980849	6.98323	4618.13	192.42	193
18	827370449	138365	34473768	17	118470681	6.98376	5979.62	249.15	249
19	932774453	159485	38865602	5	133565402	6.98365	5848.67	243.69	243
20	5734125917	270269	238921913	5	820946649	6.98477	21216.37	884.02	885

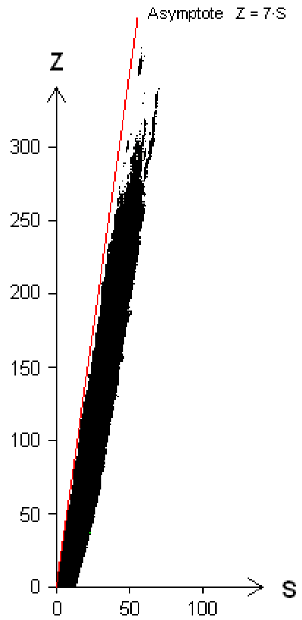


Trägt man log Z_k gegen log a_k in einem Koordinatensystem auf, liegen alle Punkte P_k (log Z_k, log a_k) in der Nähe der Kurve $y = 5 \cdot \log \frac{x}{2}$ ·

Der Grenzwert der Baum-Koordinaten

Betrachten wir noch einmal den Graphen der Baum-Koordinaten für alle ungeraden Zahlen bis 10^9. Er weist an den Seiten ein asymptotisches Wachstumsverhalten auf. Der Grund für das seitlich beschränkte Wachstum liegt in dem Verhältnis von Spalten- und Zeilenzahl der ungeraden Zahl a begründet. Offensichtlich scheint der Quotient $\frac{Z}{S}$ immer unter dem Wert 7 zu liegen, egal wie groß a ist. Der Graph scheint also eine linke Asymptote der Form $Z = p \cdot S$ mit $p \leq 7$ zu besitzen. Eine mögliche rechte Asymptote könnte $Z = q \cdot S + 33$ mit $q \leq 5$ sein.

Betrachtet man das Wachstumsverhalten des Quotienten $\frac{Z}{S}$ an der Folge der ungeraden Zahlen, fällt auf, dass es immer wieder lokale Maxima a_h gibt. Die ungeraden Zahlen, welche diese Maxima bilden sind ausschließlich von Form 12x+3, 12x+7 und 24x+9, was nicht überrascht, da die Eck-Blätter der Form 12x+3, 24x+9 die Schrittfolgen im Baum begrenzen. Liegt ein lokales Maximum der Form 12x+7 vor, so ist es immer eine Zahl in der Nachbarschaft eines Eck-Blattes. (vgl. Tabelle)



h	a_h	S	Z	$\frac{Z}{S}$	m von a_h=24x+m	x von a_h=24x+m
1	1	1	1	1	/	/
2	7	2	4	2	7	0
3	9	2	5	2.5	9	0
4	27	8	40	5	3	1
5	993	6	31	5.16667	9	41
6	1707	10	52	5.2	3	142
7	13255	19	100	5.26316	7	1104
8	17439	10	53	5.3	3	1453
9	17673	19	101	5.31579	9	736
10	81147	13	70	5.38462	3	6762
11	89119	21	114	5.42857	7	7426
12	106239	22	129	5.86364	3	8853
13	3954603	18	108	6	3	329550
14	4637979	35	212	6.05714	3	386498
15	23163739	36	220	6.11111	7	1930311
16	30884985	36	221	6.13889	9	1286874
17	274223559	37	231	6.24324	3	22851963
18	737137899	33	208	6.30303	3	61428158

Trägt man S gegen $\frac{Z}{S}$ in einem Koordinatensystem auf (hier bis 10^9) fällt nicht nur das asymptotische Verhalten von $\frac{Z}{S}$ auf, es ist zudem ein Verteilungsmuster zu erkennen, besonders gut in den ersten 15 Spalten.