Strukturen und Besonderheiten der Zahlenverteilung im ungeraden Collatz-Baum

von Mike Winkler (2009)

Die Collatz-Folge

Man beginne mit einer beliebigen natürlichen Zahl a_0 und bilde damit die rekursive Zahlenfolge:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{für } a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & \text{für } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Folge endet, wenn sie den Wert 1 erreicht.

Es wird vermutet, dass die Folge für jede natürliche Zahl a_0 nach endlich vielen Schritten den Wert 1 erreicht. Beweisen konnte man dies bis jetzt jedoch nicht.

Prinzipiell kann die Zahlenfolge eine der drei folgenden Eigenschaften haben. Sie endet bei 1, sie wächst über alle Grenzen oder sie gerät in einen Zyklus.

Betrachten wir zunächst drei Beispiele.

für $a_0 = 5$ erhält man die Folge 5, 16, 8, 4, 2, 1

für $a_0 = 9$ lautet die Folge 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

für $a_0 = 226$ ergibt sich 226, 113, 340, 170, 85, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Da auf jede ungerade Zahl stets eine gerade Zahl folgt, genügt es dieses äquivalente Problem zu betrachten:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{für } a_n \text{ gerade} \\ \frac{3a_n + 1}{2} & \text{für } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Zahlenfolgen verkürzen sich so zum Teil erheblich, da alle geraden Zahlen, die auf ungerade Zahlen folgen entfallen. Die Folgen für unsere obigen Beispiele lauten dann.

für $a_0 = 5$: 5, 8, 4, 2, 1

für $a_0 = 9$: 9, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1

für $a_0 = 226$: 226, 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

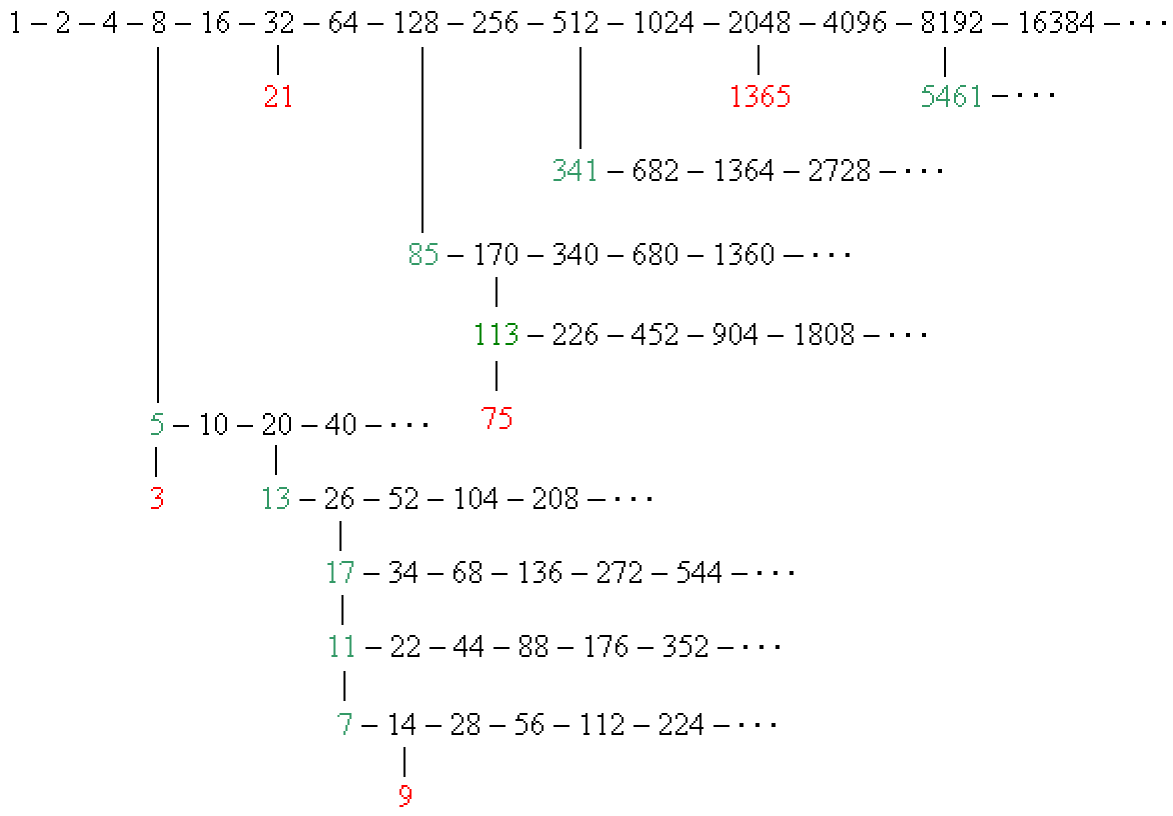
Da die geraden Zahlen in den Folgen immer nur halbiert werden bis wieder eine ungerade Zahl erreicht wird, liegt es nahe, ganz auf sie zu verzichten. Da sie quasi nur als Bindeglieder zwischen den ungeraden Zahlen fungieren sind sie für weitere Untersuchungen uninteressant.

Der Collatz-Baum

Für alle ungeraden Zahlen, für die die Collatz-Folge bei 1 endet, soll nun ein Graph konstruiert werden, der so genannte ungerade Collatz-Baum. Um dessen Konstruktion besser nachvollziehen zu können, behalten wir die geraden Zahlen der Folge zunächst noch bei.

Um eine gut lesbare Baum-Struktur zu erhalten beginnen wir oben links mit der 1 und konstruieren den Baum nach rechts und nach unten indem wir die Bildungsvorschrift der Folge rückwärts anwenden.

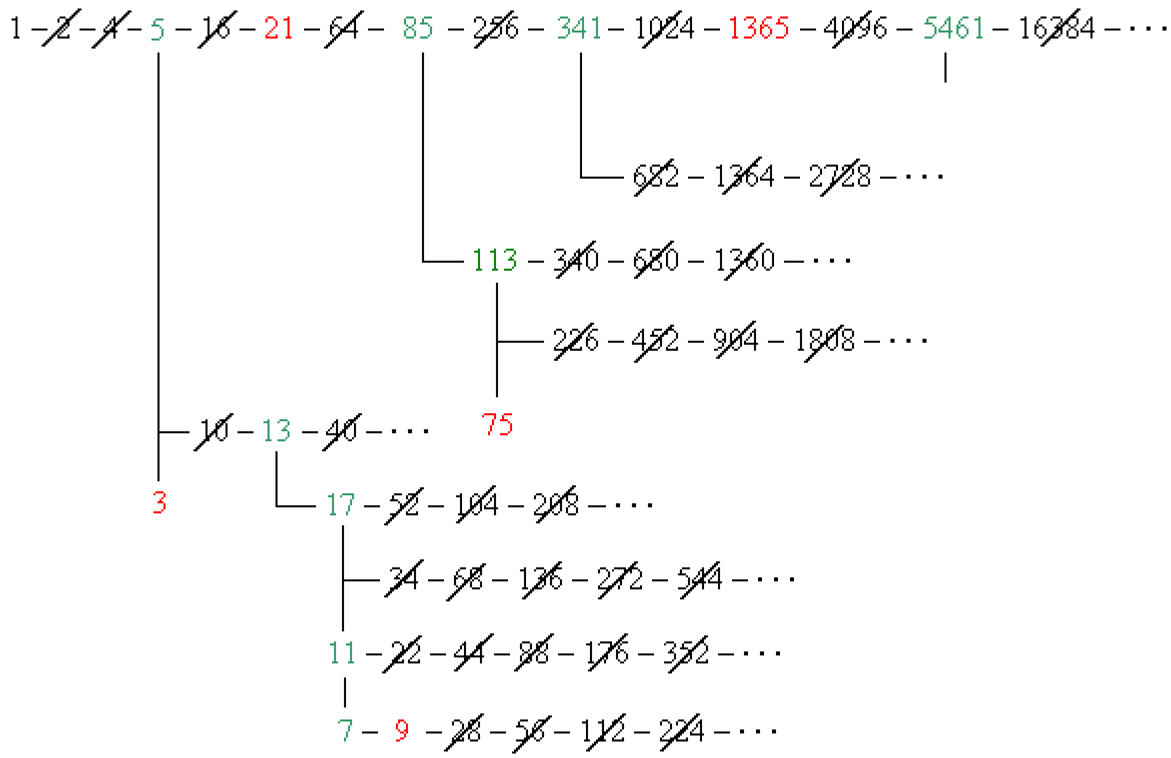
In der horizontalen Richtung (nach links) wird die jeweils nächste (gerade) Zahl durch Verdopplung ihres Vorgängers erreicht. Für jede Zahl auf diesen horizontalen Ästen wird untersucht, ob sich nach weiterer Verdopplung, Subtraktion von Eins und Division durch Drei eine ungerade Zahl ergibt. Ist dies der Fall verzweigt der Baum in vertikaler Richtung (nach unten) und es beginnt bei dieser ungeraden Zahl (grün) ein neuer horizontaler Ast. Diejenigen Äste, welche mit einer Zahl beginnen die ein Vielfaches von 3 ist (rot), sind abgeschlossen. Von ihnen kann kein weiterer Ast abzweigen, da sich durch die Konstruktionsvorschrift keine weitere ungerade Zahl ergeben kann. Diese Vielfachen von 3 werden auch als die Blätter des ungeraden Collatz-Baumes bezeichnet.



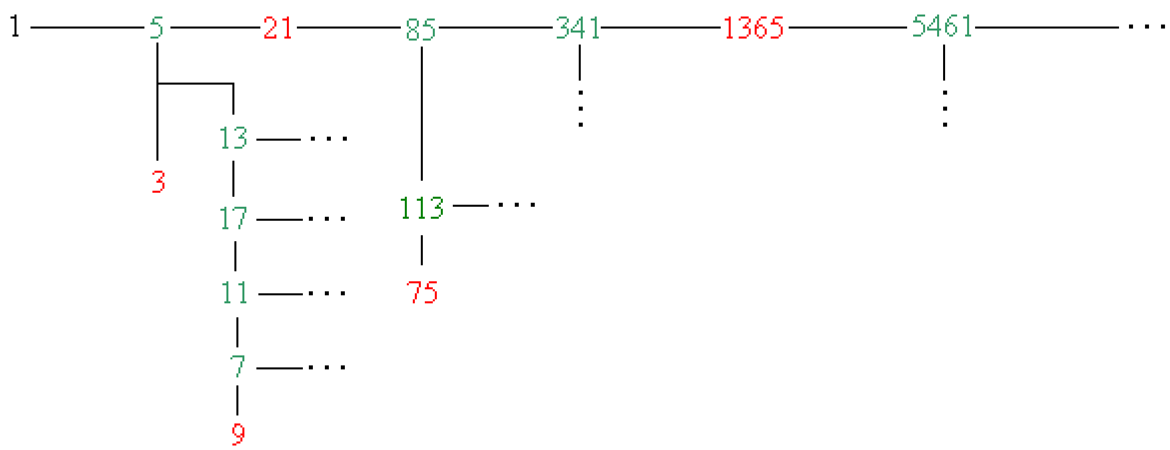
Unsere drei Beispielfolgen sind in diesem Baum vollständig erfasst. Die hier vorgestellten Darstellungen der Bäume sind aber natürlich immer nur Auszüge aus dem kompletten Graphen zu Collatz-Folge. Der Baum entwickelt sich von jeder zweiten geraden Zahl nach unten und von jeder ungeraden Zahl (außer den Blättern) nach rechts unendlich weiter.

Der ungerade Collatz-Baum in spezieller Anordnung

Um einen Baum zu erhalten, der nur die ungeraden Zahlen enthält gehen wir wie folgt vor. Zuerst nimmt jede ungerade Zahl die Position der geraden Zahl über ihr ein. Also die 5 rückt an die Stelle der 8, die 21 an die Stelle der 32, usw. Die restlichen geraden Zahlen werden aus dem Baum verbannt.



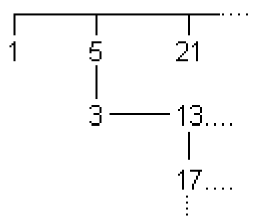
Die obere horizontale Folge 1, 5, 21, 85, 341,… bezeichnen wir ab jetzt als den Stamm des Baumes. Die restlichen Zahlen werden so angeordnet, dass die Anfangszahlen der horizontalen Äste (grün) mit den jeweils folgenden Blättern (rot) untereinander stehen.



Die Äste mit integrierten Blättern

Als Besonderheit werden im weiteren Verlauf die Blätter in die Äste integriert. Normalerweise gibt es im ungeraden Collatz-Baum keine direkte Verbindung, zum Beispiel von der 3 zur 13. Wir fügen die 3 zwischen die 5 und die 13 ein, so dass das Blatt Teil des Astes wird.

spezielle Weiterleitung



Diese Darstellung ermöglicht es uns den Baum mit zwei getrennten Bildungsvorschriften, eine für die vertikale und eine für die horizontale Richtung, so von jeder beliebigen ungeraden Zahl aus zu konstruieren, dass die Blätter keine Sonderpositionen mehr einnehmen.

Bildungsvorschrift A **Bildungsvorschrift B**

$$\xrightarrow{\;\cdot 4\; +\; 1\;}$$

$$\Big\downarrow \quad \frac{\cdot 2^n - 1}{3} = \text{ungerade}$$

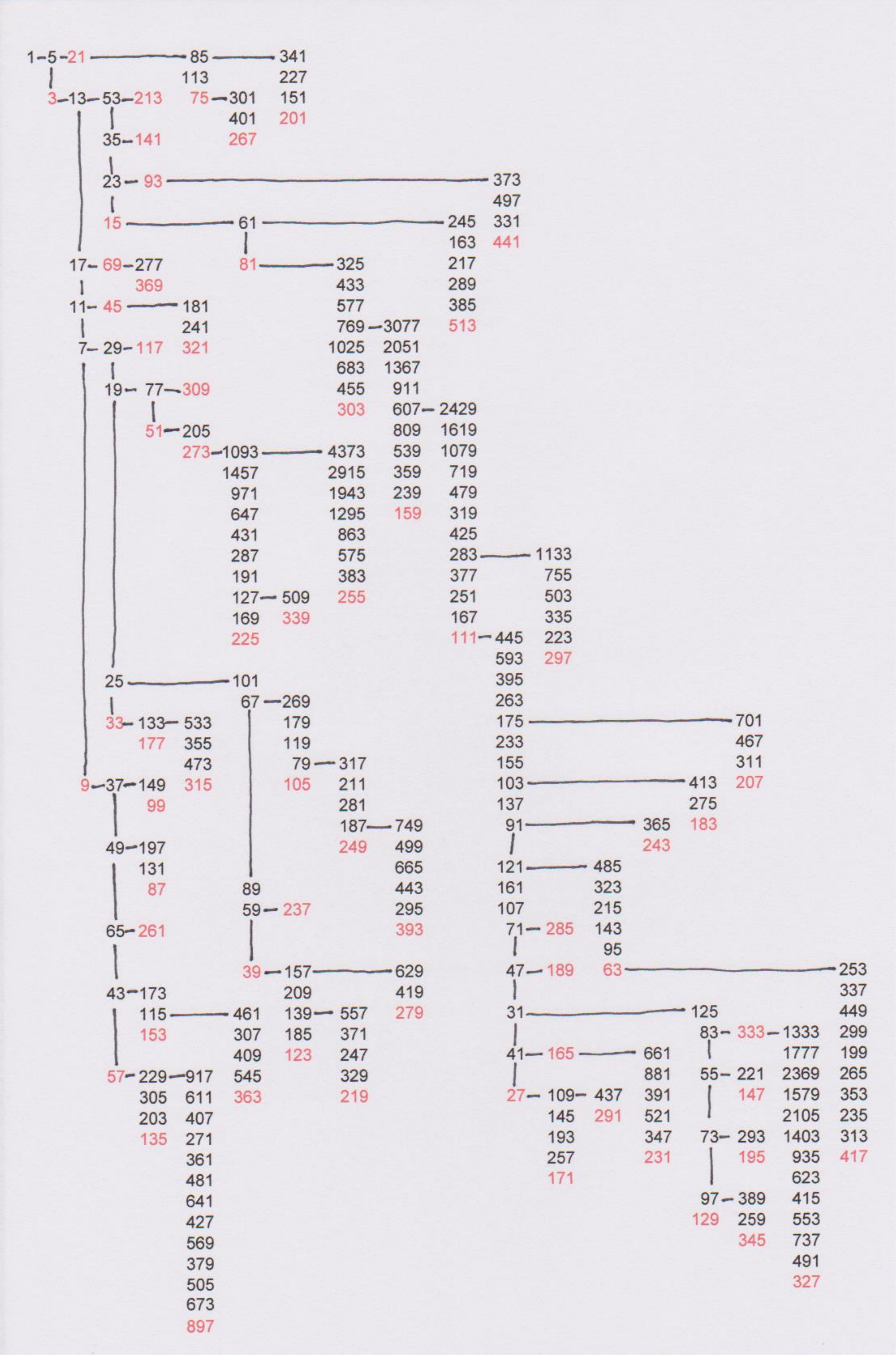
Wird durch die Bildungsvorschrift B in der vertikalen Richtung (↓) ein Blatt erreicht, verzweigt der Ast nach rechts und entwickelt sich dann wieder nach unten weiter. Dadurch ist die Entwicklung in der horizontalen Richtung (→) für jede Zahl im ungeraden Collatz-Baum die Selbe. Die Blätter sind somit vollkommen in den Baum integriert ohne dabei die Collatz-Folge zu verfälschen.

Wollen wir nun im Baum die Folge für eine bestimmte ungerade Zahl nachvollziehen, so müssen wir lediglich die Blätter auf dem Weg zur Eins überspringen um die korrekte Reihenfolge der Zahlen zu erhalten. (vgl. S. 2)

Auf Grund der zwei Bildungsvorschriften sind die Zahlen auf den horizontalen Ästen (bis auf die erste) immer von der Form **8x+5**. Die Zahlen auf den vertikalen Ästen (bis auf die oberste) sind immer von der Form **8x+1** oder **4x+3**. Doch dazu später mehr.

Der folgende Auszug aus dem ungeraden Collatz-Baum erfasst die Zahlen von 1 bis 341 vollständig. Er ist nach dem oben beschriebenen Verfahren konstruiert. In vertikaler Richtung sind die Äste bis zu den jeweils nächsten Blättern (rot) fortgeführt.

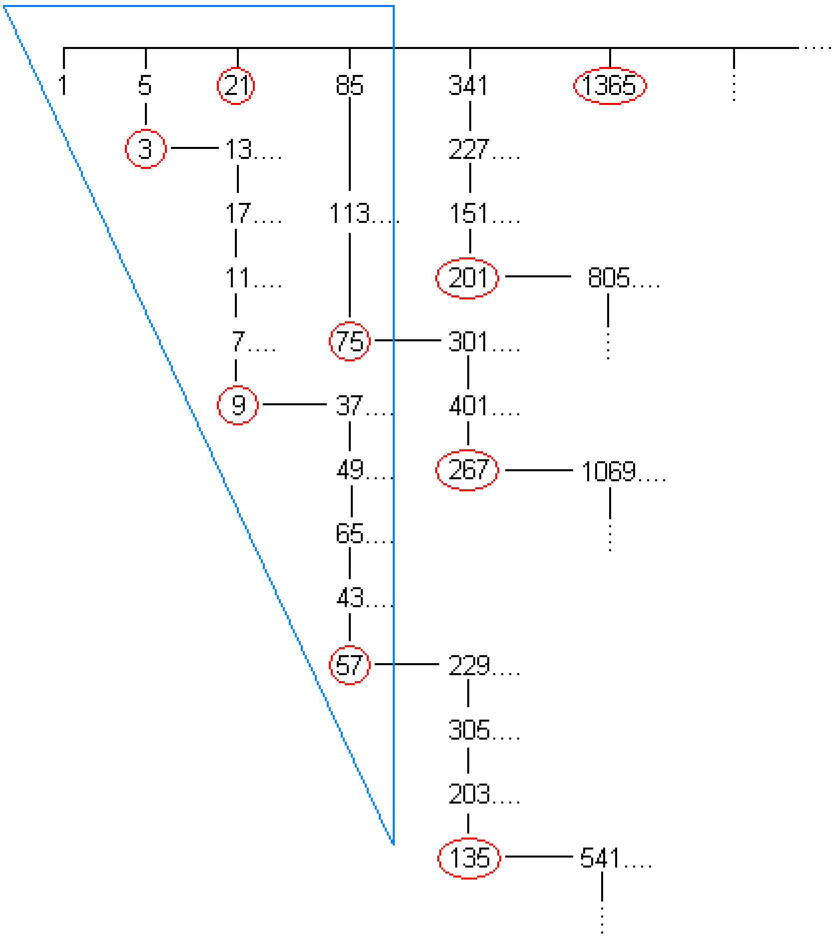
Der ungerade Collatz-Baum (Auszug, vollständig von 1 bis 341)



Der ungerade Collatz-Baum, reduziert auf die ersten Äste des Stammes in spezieller Anordnung.

Betrachten wir nun einen weiteren Auszug aus dem ungeraden Collatz-Baum. Wir beschränken uns dabei auf den Stamm [1, 5, 21, 85, 341, …] und seine ersten Äste. Also den 5er Ast [5, 3, 13, 17, 11, …], den 85er Ast [85, 113, 75, 301, …] usw. Die Konstruktion in horizontaler Richtung gestallten wir dabei wie folgt. Wird in den Ästen ein Blatt (roter Kreis) erreicht, verzweigt der Ast nach rechts, so dass die nächsten Zahlen des Astes in derselben Spalte wie die nächste Zahl des Stammes stehen.

Dadurch erhält der Baum eine Dreiecks-Struktur mit Unterteilung in Spalten, in denen die Blätter spezielle Grenzen bilden, die eine grobe Ordnung in die sonst so chaotisch anmutende Verteilung der Zahlen bringt.



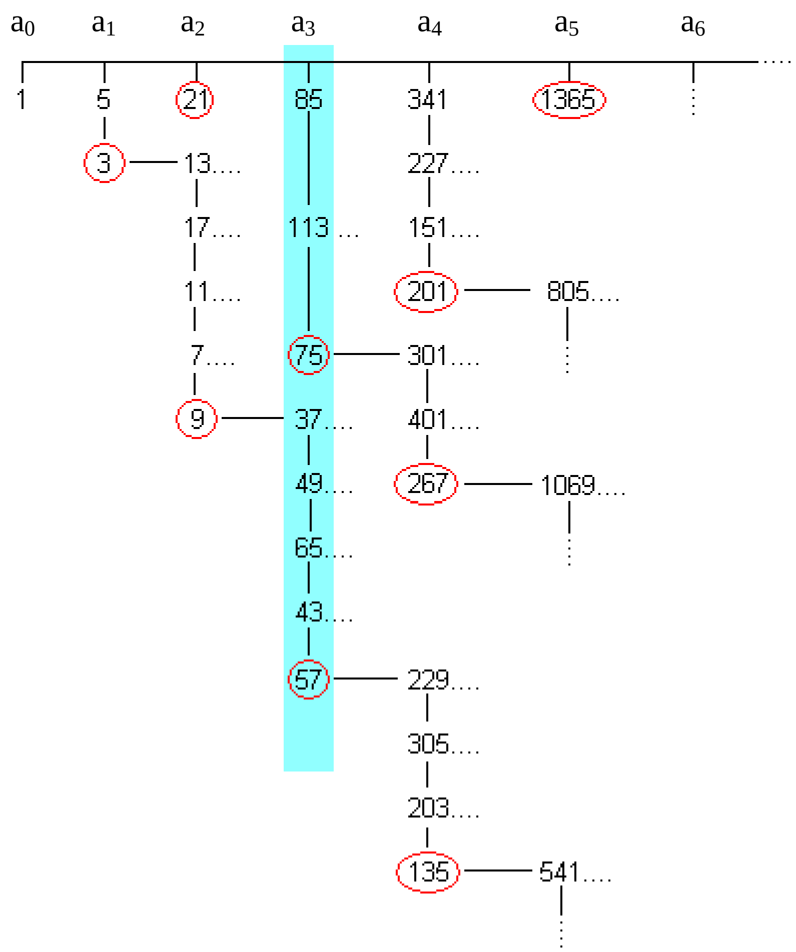
Mit Computerhilfe (hier untersucht bis $5{,}6 \cdot 10^{13}$) lässt sich nun folgendes beobachten. Die ungeraden Zahlen von 1 bis 5 finden sich bis zur 3. Dieser Fall ist trivial. Doch dann wird es interessant. Die ungeraden Zahlen von 1 bis 21 finden sich im 5er Ast bis zur 9. Die ungeraden Zahlen von 1 bis 85 finden sich im 5er Ast bis zur 57 und im 85er Ast bis zur 75. Die ungeraden Zahlen von 1 bis 341 finden sich im 5er Ast bis zur 135, im 85er Ast bis zur 267 und im 341er Ast bis zur 201. usw. bis zunächst zum 87381er Ast in der neunten Spalte.

Mit unserem Baum-Auszug auf Seite 6 können Sie es bis $a_0 = 341$ überprüfen.

Das (grobe) Ordnungsprinzip im ungeraden Collatz-Baum

Da die Zahlen des Stammes durch die rekursive Folge $a_{n+1} = 4a_n+1$ mit $a_0=1$ gegeben sind, lässt sich allgemein sagen: Alle ungeraden Zahlen von 1 bis a_n finden sich im a_n-Ast bis zum ersten Vielfachen von 3, sowie im a_{n-1}-Ast bis zum zweiten Vielfachen von 3, usw. Bis hin zum 5er Ast bis zum n-ten Vielfachen von 3. Oder anders ausgedrückt.

Alle ungeraden Zahlen von 1 bis a_n finden sich in den vorigen Ästen bis zu den entsprechenden Vielfachen von 3, die in derselben Spalte wie a_n stehen.



Beispiel für $a_3 = 85$

In der 85er Spalte (blau) finden sich nach der 75 im 85er Ast und nach der 57 im 5er Ast keine ungeraden Zahlen mehr, die kleiner als 85 sind. Alle ungeraden Zahlen von 1 bis 85 finden sich in den Ästen a_0 bis a_3 bis zu den Blättern der 85er Spalte.

Gültigkeitsbereich des Ordnungsprinzips und erste Ausreißer

Das vorgestellte Ordnungsprinzip hat uneingeschränkte Gültigkeit bis zur Spalte $a_8 = 87381$. Nach dieser Grenze muss entweder eine sehr geringe Fehlerquote mit einbezogen oder das Dreiecks-Schema um eine oder mehr Spalten erweitert werden.

Leicht modifiziert bleibt das vorgestellte Dreiecks-Schema aber das grobe Ordnungsprinzip im ungeraden Collatz-Baum in der hier vorgestellten Anordnung. Korrigiert lautet es nun.

> Alle ungeraden Zahlen von 1 bis a_n finden sich in den Ästen a_0 bis a_m bis zu den entsprechenden Vielfachen von 3, die in derselben Spalte wie a_m stehen. Dabei gilt $n \leq m$.

Das Verhalten der Differenz m-n bleibt für größere Zahlenbereiche zu untersuchen.

Es folgt eine Liste der ersten Ausreißer. Diese finden sich ab der Spalte $a_9 = 349525$. Die Ausreißer sind jeweils kleiner als der zugehörige Spaltenwert a_n und finden sich jeweils erst in den Ästen der nächsten Spalte.

Spalte $a_9 = 349525$	Ausreißer: 300223, 263271, 316283, 210855
Spalte $a_{10} = 1398101$	Ausreißer: 843421, 1124561, 749707, 999609
Spalte $a_{11} = 5592405$	Ausreißer: 3998437, 5331249
Spalte $a_{12} = 22369621$	Ausreißer: 21324997
Spalte $a_{13} = 89478485$	Ausreißer: 20665775, 13777183, 18369577, 21324997
Spalte $a_{14} = 357913941$	Ausreißer: 336607519, 326201919, 299206683, 244651439, 217467945, 163100959
Spalte $a_{15} = 1431655765$	Ausreißer: 1412386175, 1322618601, 1255454377, 1159829041, 1059289631, …

Die Spaltenzahlen in ihrer Gesamtheit

Zuvor haben wir uns mit den Spaltenzahlen der ersten Äste des Stammes beschäftigt. Nun wollen wir die Spaltenzahlen in ihrer Gesamtheit betrachten. Das heißt, dass wir wirklich alle Äste des ungeraden Collatz-Baumes berücksichtigen. Dies wird durch das besondere Konstruktionsprinzip des Baumes möglich. Durch die Dreiecks-Struktur ist die Anzahl der Zahlen in jeder Spalte begrenzt. Wir definieren die Zugehörigkeit einer Zahl zu einer Spalte durch die Anzahl ihrer Abzweigungen auf den horizontalen Ästen (vgl. S. 5 und 6). So gehören zum Beispiel 53, 35, 23 und 15 zur 85er Spalte, da sie wie die 85 selbst drei Schritte in der horizontalen Richtung von der Eins entfernt sind. Die 61, 81, 77 und 51 gehören zur 341er Spalte, da sie wie die 341 vier waagerechte Schritte von der Eins entfernt sind.

Gemäß unserer Definition sind die ersten drei Spalten, wie wir sie bis jetzt kennen, bereits vollständig (vgl. S. 8). Mit Computerhilfe lässt man nun alle ungeraden Zahlen bis zu einer bestimmten Grenze im Baum bis zur 1 zurückverfolgen und zählt dabei die Schritte nach Links. Ist die Grenze für eine Spalte hoch genug gesetzt, zeigt sich im weiteren Verlauf keine Veränderung mehr. Die Spalte ist dann vollständig.

Da die Zahlen des Stammes schnell sehr groß werden, verwenden wir zur Bezeichnung der Spalten ab jetzt die Begriffe a_0, a_1, a_2, usw., bezogen auf die Ausdrücke der rekursiven Formel für die Stammeszahlen (vgl. S. 8). Die Spalte a_3 entspricht also der 85er Spalte.

Die Anzahlen für die Spalten a_0 bis a_5 sind schon bis 10.000 vollständig. Die Anzahlen für die Spalten a_6 und a_7 erst ab 1.000.000. Die Spalte a_{10} muss bereits bis 50.000.000 untersucht werden. Die Spalte a_{11} zeigt erst ab einer Grenze von 300.000.000 keine Veränderung mehr.

Betrachtet man die Zunahme der Spaltenzahlen an regelmäßig größer werdenden Grenzen, lässt sich erkennen, dass die Zunahme exponentiell abnimmt. Hier am Beispiel der Spalte a_{11} verdeutlicht. Dabei bezeichnet „Anzahl“ die Anzahl an Spaltenzahlen bis zur gegebenen Grenze und „Differenz“ die Zunahme an Spaltenzahlen bis zur nächst höheren Grenze.

Grenze	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^7$
Anzahl	92823	95884	96484	96686	96785	96832	96859	96874	96884	96889
Differenz	3061	600	202	99	47	27	15	10	5	

Es folgt eine Auflistung der kompletten Zahlen der ersten Spalten. Die Spalte a_4 enthält bereits 41 Zahlen und ist daher nur teilweise gelistet. (Zahlen sind nach Größe gelistet)

Spalte a_0 : 1
Spalte a_1 : 3, 5
Spalte a_2 : 7, 9, 11, 13, 17, 21
Spalte a_3 : 15, 19, 23, 25, 29, 33, 35, 37, 43, 45, 49, 53, 57, 65, 69, 75, 85, 113
Spalte a_4 : 39, 51, 59, 61, 67, 77, 81, 87, 93, 99, 101, … … , 301, 305, 321, 341, 453

Bis auf die Zahl 453, die horizontal auf die 113 folgt, lassen sich diese ersten fünf kompletten Spaltenzahlen mit unserem Auszug auf Seite 6 nachvollziehen.
Die folgende Tabelle gibt die komplette Anzahl an Spaltenzahlen je Spalte bis zu einer Grenze von $4{,}8 \cdot 10^9$ an. Die roten Anzahlen sind bis zu dieser Grenze noch nicht vollständig erfasst.

Spalte a_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Stammeszahl	1	5	21	85	341	1365	5461	21845	87381	349525	1398101
Anzahl an Spaltenzahlen	1	2	6	18	41	130	399	1186	3591	10684	32132

Spalte a_n	11	12	13	14	15	16
Stammeszahl	5592405	22369621	89478485	357913941	1431655765	5726623061
Anzahl an Spaltenzahlen	96907	290511	869803			

Vergleicht man nun die Anzahl an Spaltenzahlen jeder Spalte miteinander, ergibt sich ein Vergrößerungsfaktor von Spalte zu Spalte von fast genau 3.

$$
\begin{aligned}
2 : 1 &= 2\\
6 : 2 &= 3\\
18 : 3 &= 3\\
41 : 18 &= 2.27778\\
130 : 41 &= 3.17073\\
399 : 130 &= 3.06923\\
1186 : 399 &= 2.97243\\
3591 : 1186 &= 3.02782\\
10684 : 3591 &= 2.97522\\
32132 : 10684 &= 3.00749\\
96907 : 32132 &= 3.01590\\
290511 : 96907 &= 2.99783\\
869803 : 290511 &= 2.99404
\end{aligned}
$$

Wie können vermuten, dass sich der Quotient mit zunehmender Spaltenzahl immer genauer dem Wert 3 annähert oder immer ungefähr gleich 3 ist.

Nun kommt der Wert 3 nicht von ungefähr. Er bedeutet letztlich, dass sich jede neu nach rechts verzweigte Zahl im Durchschnitt mit zwei Zahlen nach Unten fortsetzt wie z.B. die 197 mit 131 und 87. Denn jede dritte ungerade Zahl ist im Durchschnitt immer ein Blatt ohne weitere Fortsetzung nach Unten.

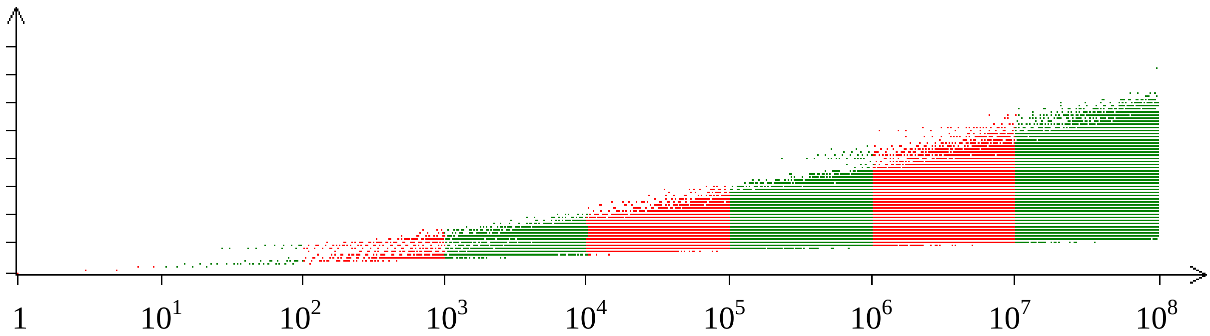
Die Realität des Baumes sieht natürlich anders aus. So folgt einer Zahl mal nur eine weitere, also ein Blatt (z.B. 61, 81), einer anderen dagegen 17 Zahlen (z.B. 445, 593,…,31, 41, 27). (vgl. S. 6)

In ihrer Gesamtheit betrachtet sind die ungeraden Zahlen also sehr gleichmäßig in unserer speziellen Dreiecks-Konstruktion des Collatz-Baumes verteilt.

Bis zu welcher Spalte finden sich die Zahlen bis 10^X ?

Wir wissen bereits, dass durch die Dreiecks-Struktur des Baumes die Anzahl der Zahlen einer Spalte begrenzt ist. Nun wollen wir untersuchen bis zu welcher Spalte sich die Zahlen bis zu einer bestimmten oberen Grenze finden. Die ungeraden Zahlen bis 10 finden sich in den Spalten a_0, a_1 und a_2. Die ungeraden Zahlen bis 100 finden sich bis zur Spalte a_9.

Trägt man die ungeraden Zahlen c, für die die Collatz-Folge bei 1 endet, logarithmisch auf die x-Achse und die entsprechende Spalte auf die y-Achse auf, ergibt sich das Bild einer relativ gleichmäßigen Verteilung. Am oberen Rand ist der Graph ausgefranst, bleibt aber unter einer oberen Schranke. Der untere Teil des Graphen lässt erkennen, dass die Zahlen c ab einer gewissen Größe nicht mehr in einer Spalte auftauchen.



Die Tabelle ist wie folgt zu lesen. Die ungeraden Zahlen von 0 bis 10, für die die Collatz-Folge bei 1 endet, finden sich in den Spalten a_0 bis a_2.

0 bis 10	a_0 bis a_2
10 bis 10^2	a_2 bis a_9
10^2 bis 10^3	a_4 bis a_{14}
10^3 bis 10^4	a_5 bis a_{19}
10^4 bis 10^5	a_6 bis a_{28}
10^5 bis 10^6	a_8 bis a_{41}
10^6 bis 10^7	a_9 bis a_{51}
10^7 bis 10^8	a_{10} bis a_{64}
10^8 bis 10^9	a_{11} bis a_{88}

Die ungeraden Zahlen von 10^{x-1} bis 10^x finden sich in den Spalten a_x bis a_{x*x+x}.

Die Beziehung zwischen den Stammeszahlen und der kompletten Anzahl an Spaltenzahlen je Spalte

Wir betrachten nun für jede Spalte den Quotienten aus der Stammeszahl und der jeweiligen kompletten Anzahl an Spaltenzahlen. Das Ergebnis runden wir bei einer geraden Zahl vor dem Komma nach oben, bei einer ungeraden Zahl nach unten, so dass wir stets eine ungerade Zahl erhalten. Die roten Zahlen sind nicht genau, sondern eine Abschätzung mit dem Vergrößerungsfaktor 3. Wegen der Größe der Zahlen ist der Quotient mit dieser Abschätzung jedoch sehr genau.

1 : 1 = 1 → 1
5 : 2 = 2.5 → 3
21 : 6 = 3.5 → 3
85 : 18 = 4.72 → 5
341 : 41 = 8.32 → 9
1365 : 130 = 10.5 → 11
5461 : 399 = 13.69 → 13
21845 : 1186 = 18.42 → 19
87381 : 3591 = 24.33 → 25
349525 : 10684 = 32.71 → 33
1398101 : 32132 = 43.51 → 43
5592405 : 96907 = 57.71 → 57
22369621 : 290511 = 77.00 → 77
89478485 : 871533 = 103.45 → 103
357913941 : 2614599 = 136.89 → 137
1431655765 : 7843797 = 182.52 → 183
5726623061 : 23531391 = 243.36 → 243
22906492245 : 70594173 = 324.48 → 325
91625968981 : 211782519 = 432.64 → 433
366503875925 : 635347557 = 576.86 → 577
1466015503701 : 1906042671 = 769.14 → 769
5864062014805 : 5718128013 = 1025.51 → 1025
23456248059221 : 17154384039 = 1367.36 → 1367
93824992236885 : 51463152117 = 1823.15 → 1823
375299968947541 : 154389456351 = 2430.87 → 2431
1501199875790165 : 463168369053 = 3241.15 → 3241
6004799503160661 : 1389505107159 = 4321.54 → 4321
usw.

Wir erhalten die Folge 1, 3, 3, 5, 9, 11, 13, 19, 25, 33, 43, 57, 77, 103, 137, 183, 243, 325, 433, 577, 769, 1025, 1367, 1823, 2431, 3241, 4321, , … .

Diese Folge von größer werdenden ungeraden Zahlen erscheint zunächst unscheinbar, doch unterteilt man sie in kleinere Abschnitte lässt sich erkennen, dass es sich um Teilfolgen von Collatz-Folgen bzw. benachbarte Zahlen im Collatz-Baum handelt, die zum Teil in der korrekten Reihenfolge auftreten.

Diese Teilfolgen sind [13, 3, 5, 1] , [33, 25, 19] , [57, 43] , [77, 19] , [137, 103] , [1025, 769, 577, 433, 325].

Wir können diese Folge auch mit einer Formel herleiten.

Sie lautet: $$\frac{1}{3^{n-1} \cdot 1{,}64} \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$$

Der Faktor 1,64 ergibt sich aus dem Quotienten der größten noch genauen Anzahl an Spaltenzahlen und der entsprechenden 3er Potenz der Spalte, also

$$290511 : 3^{11} = 1{,}6399430981049636742366509 17035.$$

Die Summe der 2^{2k} für k von 0 bis n ergibt die jeweilige Stammeszahl a_n. Die Variable n steht für die entsprechende Spalte, also n=0 für Spalte a_0.

Die Folge mit dem genauen Wert aus der Formel liefert 1, 3, 5, 5, 7, 11, 13, 19, 25, 33, 43, 57, 77, 103, 137, 183, 243, 325, 433, 577, 769, 1025, 1367, 1823, 2431, 3241, 4321, 5763, 7683, 10243, 13659, 18211, 24281, 32375, 43167, 57555, 76741, 102321, 136427, 181903, 242539, 323385, 431179, … .

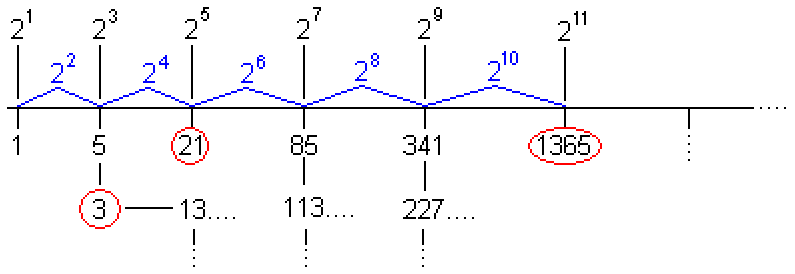
Ab der 11 stimmt sie mit der vorherigen Folge genau überein. Der Anfang liefert mit der 7 sogar noch die zusätzliche Teilfolge [9, 7, 11].

Es stellt sich die Frage, ob dies etwas Besonderes ist? Ein Vergleich mit den Folgengliedern für andere Faktoren statt 1,64 z.B. 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 ,etc. zeigt, dass sich auch bei diesen Werten Teilfolgen mit zwei bis drei Zahlen ergeben. Allerdings nicht so häufig wie mit dem Wert 1.64.

Die Beziehung zwischen den Spaltenzahlen und den Blättern der ersten Äste des Stammes

Wie wir gesehen haben stehen in einer Spalte die Blätter der ersten Äste mit der entsprechenden Zahl des Stammes in einer engen Beziehung. Doch wie sieht es mit den restlichen Zahlen der ersten Äste einer Spalte aus? Stehen sie in einem ähnlichen Zusammenhang? Ja, doch dies wird erst ersichtlich, wenn man die Blätter des Baumes Modulo 2^k betrachtet.

Die Abstände der Zahlen des Stammes (blau) sind die 2er Potenzen mit geradem Exponenten, also 4, 16, 64, 256,… . Aus Symmetriegründen kann man den Spalten somit die Werte der 2er Potenzen mit ungeradem Exponenten, also 8, 32, 128, 512,… zuordnen. Die ungeraden Exponenten folgen aber auch aus der Rekursionsformel des Stammes (vgl. S. 8) mit dem Ausdruck k = 2n+1. Für a_0=1 ist k=1, für a_1=5 ist k=3, für a_2=21 ist k=5, usw.



Betrachtet man nun die Menge der Blätter Modulo der 2er Potenzen, so fällt auf, dass alle Zahlen einer Spalte sich in den Modulo-Resten der entsprechenden 2er Potenz der Spalte wieder finden.

Die folgende Tabelle zeigt links die Blätter, gruppiert in der Reihenfolge wie sie auch in den Spalten zu finden sind. Dabei ist b das Blatt, m die Anzahl der 2er Potenzen und r der Rest der Division.

Die Werte der Tabelle sind also wie folgt zu lesen.

$$b = m \cdot 2^k + r$$

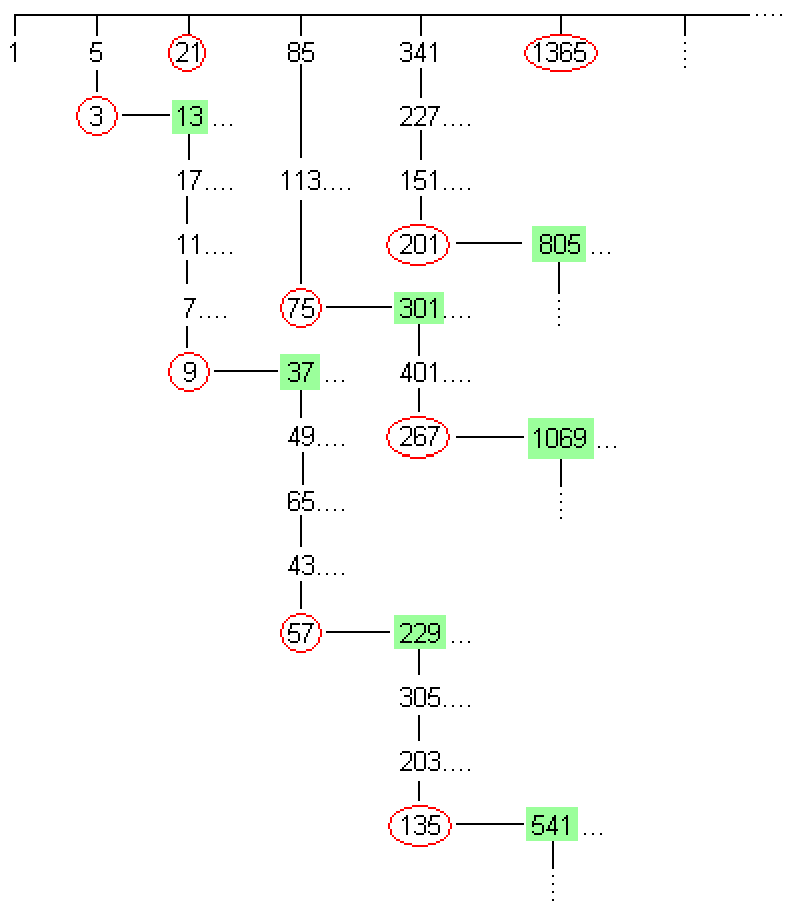
Beispiel: $75 = 9 \cdot 2^3 + 3 = 2 \cdot 2^5 + 11$

b	$m \cdot 2^3$	r	$m \cdot 2^5$	r
3				
21	2	5		
9	1	1		
75	9	3	2	11
57	7	1	1	25
201	25	1	6	9
267	33	3	8	11
135	16	7	4	7
1365	170	5	42	21
423	52	7	13	7
1425	178	1	44	17
1281	160	1	40	1

Die Zahlen der 5er Spalte [5, 3] finden sich als Modulo-Reste bei 21 und 75 wieder. Die 2er Potenz der Modulo-Rechnung ist dabei 2^3, also der zugehörige Spaltenwert.

Die Zahlen der 21er Spalte [21, 13, 17, 11, 7, 9] finden sich (bis auf die 13) als Modulo-Reste bei 75, 201, 135, 1365 und 1425 wieder. Die 2er Potenz der Modulo-Rechnung ist der entsprechende Spaltenwert 2^5.

Eine Ausnahme stellen die Zahlen dar, welche im Baum direkt auf die Blätter folgen, also 13, 37, 301, 229, usw. Diese sind wegen der horizontalen Bildungsvorschrift stets von der Form 12x+1 und können somit kein Modulo-Rest einer 2er Potenz sein, die größer ist als sie.



Die Abstände der Blätter, in denen sich die Spaltenzahlen als Modulo-Reste wieder finden, werden mit wachsender 2er Potenz immer größer.

Man vergleiche hierzu die Ergebnisse für die 85er und die 341er Spalte, wobei letztere noch unvollständig ist.

Die 85er Spalte

1365	=	10	·	2^7	+	85
7281	=	56	·	2^7	+	113
3009	=	23	·	2^7	+	65
5067	=	39	·	2^7	+	75
14265	=	111	·	2^7	+	57
43185	=	337	·	2^7	+	49
34552875	=	269944	·	2^7	+	43

Die 341er Spalte

87381	=	170	·	2^9	+	341
92049	=	179	·	2^9	+	401
1091889	=	2132	·	2^9	+	305
932067	=	1820	·	2^9	+	227
62843595	=	122741	·	2^9	+	203
2945186439	=	5752317	·	2^9	+	135
0000000000	=	0000000	·	2^9	+	151
0000000000	=	0000000	·	2^9	+	267

Wie in der Tabelle zu sehen ist, finden sich die Spaltenzahlen auch noch bei anderen 2er Potenzen wieder, jedoch immer nur teilweise. Vollständig (rot) sind sie nur in den ungeraden Potenzen der entsprechenden Spalte zu finden.

b	**$m \cdot 2^2$**	**r**	**$m \cdot 2^3$**	**r**	**$m \cdot 2^4$**	**r**	**$m \cdot 2^5$**	**r**	**$m \cdot 2^6$**	**r**	**$m \cdot 2^7$**	**r**	**$m \cdot 2^8$**	**r**	**$m \cdot 2^9$**	**r**
21	5	1	2	5	1	5										
9	2	1	1	1												
75	18	3	9	3	4	11	2	11	1	11						
57	14	1	7	1	3	9	1	25								
201	50	1	25	1	12	9	6	9	3	9	1	73				
267	66	3	33	3	16	11	8	11	4	11	2	11	1	11		
135	33	3	16	7	8	7	4	7	2	7	1	7				
1365	341	1	170	5	85	5	42	21	21	0	10	85	5	85	2	341
423	105	3	52	7	26	7	13	7	6	39	3	39	1	167		
1425	356	1	178	1	89	1	44	17	22	17	11	17	5	145	2	401
1281	320	1	160	1	80	1	40	1	20	1	10	1	5	1	2	257
7281	1820	1	910	1	455	1	227	17	113	49	56	113	28	113	14	113
3009	752	1	376	1	188	1	94	1	47	1	23	65	11	193	5	449
5067	1266	3	633	3	316	11	158	11	79	11	39	75	19	203	9	459
8097	2024	1	1012	1	506	1	253	1	126	33	63	33	31	161	15	417
17259	4314	3	2157	3	1078	11	539	11	269	43	134	107	67	107	33	363
51777	12944	3	6472	3	3236	3	1618	3	809	1	404	65	202	65	101	65
14265	3566	1	1783	1	891	9	445	25	222	57	111	57	55	185	27	441
36033	9008	1	4504	1	2252	1	1126	1	563	1	281	65	140	193	70	193
43185	10796	1	5398	1	2699	1	1349	17	674	49	337	49	168	177	84	177
87381	21845	1	10922	5	5461	1	2730	21	1365	21	682	85	341	85	170	341
92049	23012	1	11506	1	5753	1	2876	17	1438	17	719	17	359	145	179	401
368193	92048	1	4602	1	23012	1	11506	1	5753	1	2876	65	1438	65	719	65
120225	30056	1	15028	1	7514	1	3757	1	1878	33	939	33	469	161	234	417
1366593	341648	1	170824	1	85412	1	42706	1	21353	1	10676	65	5338	65	2669	65
204729	51182	1	25591	1	12795	9	6397	25	3198	57	1599	57	799	185	399	441
349525	87381	1	43690	5	21845	5	10922	21	5461	21	2730	85	1365	85	682	341
245481	61370	1	30685	1	15342	9	7671	9	3835	41	1917	105	958	233	479	233
490929	122732	1	61366	1	30683	1	15341	17	7670	49	3835	49	1917	177	958	433
1309131	327282	3	163641	3	81820	11	40910	11	20455	11	10227	75	5113	203	2556	459
427467	106866	3	53433	3	26716	11	13358	11	6679	11	3339	75	1669	203	834	459
7288497	1822124	1	911062	1	455531	1	227765	17	113882	49	56941	49	28470	177	14235	177
1091889	272972	1	136486	1	68243	1	34121	17	17060	49	8530	49	4265	49	2132	305
932067	233016	3	116508	3	58254	3	29127	3	14563	35	7281	99	3640	227	1820	227
1309233	327308	1	163654	1	81827	1	40913	17	20456	49	10228	49	5114	49	2557	49
2618289	654572	1	327286	1	163643	1	81821	17	40910	49	20455	49	10227	177	5113	433
5516667	1379166	3	689583	3	344791	11	172395	27	86197	59	43098	123	21549	123	10774	379
210855	52713	3	26356	7	13178	7	6589	7	3294	39	1647	39	823	167	411	426
34552875	8638218	3	4319109	3	2159554	11	1079777	11	539888	43	269944	43	134972	43	67486	43
4601211	1150302	3	575151	3	287575	11	143787	27	71893	59	35946	123	17973	123	8986	379

Die Beziehung zwischen den Stammeszahlen, den Blättern der ersten Äste und der kompletten Anzahl an Spaltenzahlen je Spalte

Auf Grund der zwei Bildungsvorschriften sind die Zahlen auf den horizontalen Ästen (bis auf die erste) von der Form **8x+5**. Die Zahlen auf den vertikalen Ästen (bis auf die oberste) sind entweder von der Form **8x+1** oder **4x+3**. (vgl. S. 4)

Die ersten Blätter der horizontalen Äste sind somit entweder von Form **24x+9** (9, 33, 57, 81, 105,…) oder **12x+3** (3, 15, 27, 39, 51,…). Alle übrigen Blätter sind von der Form **24x+21** (21, 45, 69, 93, 117,…).

Wir stellen nun die Blätter der ersten Äste jeder Spalte in dieser Form dar, ähnlich unserer Tabelle auf Seite 11.