# Über die diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$

Mike Winkler

28.04.2014

## Inhalt

# 1 Die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$

*Satz*: Die diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ besitzt keine nichttriviale Lösung.

Die Behauptung ist gleichwertig mit der, dass $x^3 - y^3 = z^3$ oder $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ keine nichttriviale Lösung besitzt. Es sei $(x, y, z)$ eine nichttriviale ganzzahlige Lösung von

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0. \tag{1}$$

Wir können uns dabei auf Lösungen $(x, y, z)$ mit $ggT(x, y, z) = 1$ beschränken, woraus sofort die paarweise Teilerfremdheit von $x, y, z$ folgt. Von den Zahlen $x, y, z$ ist dann genau eine gerade. Mit $(x, y, z)$ folgt aus der Identität

$$(x + y + z)^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x) + x^3 + y^3 + z^3,$$

dass mit (1) auch

$$(x + y + z)^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x) \tag{2}$$

gelten muss. Aus (2) folgt $3|(x+y+z)$. Wegen $ggT(x, y, z) = 1$ ist auch $ggT(x+y, y+z, z+x) = 1$. Da die linke Seite von (2) ohne Rest teilbar durch $3^3$ ist, muss auf der rechten Seite genau einer der Faktoren $(x + y), (y + z), (z + x)$ teilbar durch 9 sein. Wir nehmen an es sei $9|(x+y)$. Andernfalls tauschen wir einfach die Variablen. Wegen $ggT(x+y, y+z, z+x) = 1$ ist dann $ggT(9(x+y), y+z, z+x) = 1$. Somit müssen $\frac{x+y}{9}$, $y + z$, $z + x$ selbst Kubikzahlen sein. Es sei

$$a^3 = \frac{x + y}{9}, \qquad b^3 = y + z, \qquad c^3 = z + x. \tag{3}$$

Somit ist $ggT(x + y, y + z, z + x) = ggT(9a^3, b^3, c^3) = ggT(3a, b, c) = 1$. Mittels Äquivalenzumformung erhalten wir aus (1)

$$z^3 = -(x + y)(x^2 - xy + y^2), \tag{4}$$

$$x^3 = -(y + z)(y^2 - yz + z^2), \tag{5}$$

$$y^3 = -(z + x)(z^2 - zx + x^2). \tag{6}$$

Mit (3) folgt aus (4), (5), (6), dass $3a|z,\ b|x,\ c|y$ ist. Sei

$$\alpha = \frac{z}{3a}, \qquad \beta = \frac{x}{b}, \qquad \gamma = \frac{y}{c}. \tag{7}$$

Wegen $ggT(z, x, y) = ggT(3a\alpha, b\beta, c\gamma) = 1$ und $ggT(3a, b, c) = 1$ ist auch $ggT(3\alpha, \beta, \gamma) = 1$. Mit (7) erhalten wir aus (4), (5), (6)

$$3\alpha^3 = -(x^2 - xy + y^2), \tag{8}$$

$$\beta^3 = -(y^2 - yz + z^2), \tag{9}$$

$$\gamma^3 = -(z^2 - zx + x^2). \tag{10}$$

Dann ist $ggT(3\alpha, \beta, \gamma) = ggT(3\alpha^3, \beta^3, \gamma^3) = ggT(3(x^2 - xy + y^2),\ y^2 - yz + z^2,\ z^2 - zx + x^2) = 1$.

Mit (3) folgt aus (2)

$$x + y + z = 3abc. \tag{11}$$

Mit (3) folgt aus (8)

$$z = 3abc - (x + y) = 3abc - 9a^3 = 3a(bc - 3a^2), \tag{12}$$
$$x = 3abc - (y + z) = 3abc - b^3 = b(3ac - b^2), \tag{13}$$
$$y = 3abc - (z + x) = 3abc - c^3 = c(3ab - c^2). \tag{14}$$

Mit (7) folgt aus (12), (13), (14)

$$\alpha = bc - 3a^2, \qquad \beta = 3ac - b^2, \qquad \gamma = 3ab - c^2. \tag{15}$$

Wegen $ggT(3a, b, c) = 1$ ist dann $ggT(3a, \alpha) = 1$, $ggT(b, \beta) = 1$, $ggT(c, \gamma) = 1$.

Um die nachfolgenden Gleichungen und Terme übersichtlicher und lesbarer zu gestalten substituieren wir wie folgt. Es sei

$$r = (x - y)^2, \qquad s = (y - z)^2, \qquad t = (z - x)^2, \tag{16}$$

und

$$u = (x + y - z)^2, \qquad v = (y + z - x)^2, \qquad w = (z + x - y)^2. \tag{17}$$

Mit

$$\mathcal{A} = xyr(u^2 - 1) + yzs(v^2 - 1) + zxt(w^2 - 1),$$
$$\mathcal{B} = 2xyru + 2yzsv + 2zxtw,$$
$$\mathcal{C} = xyr(u^2 + 1) + yzs(v^2 + 1) + zxt(w^2 + 1),$$

gilt dann die Identität

$$2^6 \cdot xyz \cdot rst \cdot (x^3 + y^3 + z^3) = \mathcal{C}^2 - \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2. \tag{18}$$

Mit $(x, y, z)$ folgt aus (18), dass mit (1) auch

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \mathcal{C}^2 \tag{19}$$

gelten muss. Alle ganzzahligen Lösungen für (19) sind mit ganzen Zahlen $m, n$ folgendermaßen darstellbar:

$$\mathcal{A} = m^2 - n^2, \qquad \mathcal{B} = 2mn, \qquad \mathcal{C} = m^2 + n^2.$$

Es ist dann

$$m^2 - n^2 = xyr(u^2 - 1) + yzs(v^2 - 1) + zxt(w^2 - 1), \tag{20}$$
$$2mn = 2xyru + 2yzsv + 2zxtw, \tag{21}$$
$$m^2 + n^2 = xyr(u^2 + 1) + yzs(v^2 + 1) + zxt(w^2 + 1). \tag{22}$$

Aus Subtraktion von (20) und (22) folgt

$$n^2 = xyr + yzs + zxt. \tag{23}$$

Aus (21) folgt nach Division durch 2

$$mn = xyru + yzsv + zxtw. \tag{24}$$

Aus Addition von (20) und (22) folgt

$$m^2 = xyru^2 + yzsv^2 + zxtw^2. \tag{25}$$

Mit (3) und (7) folgt aus (17)

$$\begin{aligned} u &= (x + y - z)^2 = (9a^3 - z)^2 = (9a^3 - 3a\alpha)^2 = 9a^2(3a^2 - \alpha)^2, \\ v &= (y + z - x)^2 = (b^3 - x)^2 = (b^3 - b\beta)^2 = b^2(b^2 - \beta)^2, \\ w &= (z + x - y)^2 = (c^3 - y)^2 = (c^3 - c\gamma)^2 = c^2(c^2 - \gamma)^2, \end{aligned}$$

woraus $9a^2|u,\ b^2|v,\ c^2|w$ folgt. Wegen $ggT(3a, \alpha) = ggT(3a^2 - \alpha, \alpha) = 1$, $ggT(b, \beta) = ggT(b^2 - \beta, \beta) = 1$, $ggT(c, \gamma) = ggT(c^2 - \gamma, \gamma) = 1$, ist $\alpha \nmid u,\ \beta \nmid v,\ \gamma \nmid w$ sowie $ggT(u, \alpha) = 1$, $ggT(v, \beta) = 1$, $ggT(w, \gamma) = 1$.

Mit $3a|u,\ b|v,\ c|w$ und $3a|z,\ b|x,\ c|y$ folgt aus (24), dass $3a|mn,\ b|mn,\ c|mn$ ist, da die rechte Seite von (24) jeweils ohne Rest durch $3a, b, c$ teilbar ist. Mit der gleichen Argumentation folgt aus (25), dass $3a|m^2,\ b|m^2,\ c|m^2$ ist. Mit der zusätzlichen Bedingung $ggT(3a, \alpha) = 1$, $ggT(b, \beta) = 1$, $ggT(c, \gamma) = 1$, folgt aus (23), dass $3a \nmid n^2,\ b \nmid n^2,\ c \nmid n^2$ ist.

Aus $3a|mn,\ b|mn,\ c|mn$ und $3a|m^2,\ b|m^2,\ c|m^2$ und $3a \nmid n^2,\ b \nmid n^2,\ c \nmid n^2$ folgt daher, dass $3abc|m$ und $ggT(3abc, n) = 1$ ist. Sei

$$m = 3abc \cdot k, \tag{26}$$

dann erhalten wir mit (11)

$$m = (x + y + z) \cdot k. \tag{27}$$

Mit (8), (9), (10) folgt aus (16)

$$r = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = -(3\alpha^3 + xy), \tag{28}$$

$$s = (y - z)^2 = y^2 - 2yz + z^2 = -(\beta^3 + yz), \tag{29}$$

$$t = (z - x)^2 = z^2 - 2zx + x^2 = -(\gamma^3 + zx). \tag{30}$$

Mit (28), (29), (30) folgt aus (23)

$$\begin{aligned} n^2 &= -xy(3\alpha^3 + xy) - yz(\beta^3 + yz) - zx(\gamma^3 + zx) \\ n^2 &= -3xy\alpha^3 - (xy)^2 - yz\beta^3 - (yz)^2 - zx\gamma^3 - (zx)^2 \\ n^2 + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 &= -3xy\alpha^3 - yz\beta^3 - zx\gamma^3, \end{aligned}$$

für die rechte Seite gilt mit $z = 3a\alpha, x = b\beta, y = c\gamma$ aus (7)

$$\begin{aligned} n^2 + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 &= -3b\beta c\gamma\alpha^3 - c\gamma 3a\alpha\beta^3 - 3a\alpha b\beta\gamma^3 \\ n^2 + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 &= -3\alpha\beta\gamma(\alpha^2 bc + \beta^2 ca + \gamma^2 ab). \end{aligned} \tag{31}$$

Mit (28), (29), (30) folgt aus (24)

$$\begin{aligned} mn &= -xy(3\alpha^3 + xy)u - yz(\beta^3 + yz)v - zx(\gamma^3 + zx)w \\ mn &= -3xy\alpha^3 u - (xy)^2 u - yz\beta^3 v - (yz)^2 v - zx\gamma^3 w - (zx)^2 w \\ mn + (xy)^2 u + (yz)^2 v + (zx)^2 w &= -3xy\alpha^3 u - yz\beta^3 v - zx\gamma^3 w, \end{aligned}$$

für die rechte Seite gilt mit $z = 3a\alpha, x = b\beta, y = c\gamma$ aus (7)

$$\begin{aligned} mn + (xy)^2 u + (yz)^2 v + (zx)^2 w &= -3b\beta c\gamma\alpha^3 u - c\gamma 3a\alpha\beta^3 v - 3a\alpha b\beta\gamma^3 w \\ mn + (xy)^2 u + (yz)^2 v + (zx)^2 w &= -3\alpha\beta\gamma(\alpha^2 bcu + \beta^2 cav + \gamma^2 abw). \end{aligned} \tag{32}$$

Mit (28), (29), (30) folgt aus (25)

$$\begin{aligned} m^2 &= -xy(3\alpha^3 + xy)u^2 - yz(\beta^3 + yz)v^2 - zx(\gamma^3 + zx)w^2 \\ m^2 &= -3xy\alpha^3 u^2 - (xyu)^2 - yz\beta^3 v^2 - (yzv)^2 - zx\gamma^3 w^2 - (zxw)^2 \\ m^2 + (xyu)^2 + (yzv)^2 + (zxw)^2 &= -3xy\alpha^3 u^2 - yz\beta^3 v^2 - zx\gamma^3 w^2, \end{aligned}$$

für die rechte Seite gilt mit $z = 3a\alpha, x = b\beta, y = c\gamma$ aus (7)

$$\begin{aligned} m^2 + (xyu)^2 + (yzv)^2 + (zxw)^2 &= -3b\beta c\gamma\alpha^3 u^2 - c\gamma 3a\alpha\beta^3 v^2 - 3a\alpha b\beta\gamma^3 w^2 \\ m^2 + (xyu)^2 + (yzv)^2 + (zxw)^2 &= -3\alpha\beta\gamma(\alpha^2 bcu^2 + \beta^2 cav^2 + \gamma^2 abw^2). \end{aligned} \tag{33}$$

*Lemma 1*: Es gilt

$$4(x+y)z = (3abc)^2 - u, \tag{34}$$

$$4(y+z)x = (3abc)^2 - v, \tag{35}$$

$$4(z+x)y = (3abc)^2 - w. \tag{36}$$

*Beweis*: Mit $3abc = x + y + z$ aus (11) und $u = (x + y - z)^2$ aus (17) folgt aus (34)

$$\begin{aligned} 4(x+y)z &= (x+y+z)^2 - (x+y-z)^2 \\ 4(x+y)z &= \big((x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2\big) - \big((x+y)^2 - 2(x+y)z + z^2\big) \\ 4(x+y)z &= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 - (x+y)^2 + 2(x+y)z - z^2 \\ 4(x+y)z &= 4(x+y)z. \end{aligned}$$

Durch Variablentausch verläuft der Beweis für (35) und (36) ganz analog. □

*Lemma 2*: Es gilt

$$(3abc)^2(\alpha^2bc+\beta^2ca+\gamma^2ab)=\alpha^2bcu+\beta^2cav+\gamma^2abw. \tag{37}$$

*Beweis*: Mit $z=3a\alpha, x=b\beta, y=c\gamma$ aus (7) folgt aus (1)

$$(3a\alpha)^3+(b\beta)^3+(c\gamma)^3=0.$$

Nach Multiplikation mit $4abc$ folgt

$$3^3a^3\alpha^3\cdot 4abc+b^3\beta^3\cdot 4abc+c^3\gamma^3\cdot 4abc=0$$
$$\alpha^2bc\cdot 4(9a^3)3a\alpha+\beta^2ca\cdot 4(b^3)b\beta+\gamma^2ab\cdot 4(c^3)c\gamma=0.$$

Mit $9a^3=x+y, b^3=y+z, c^3=z+x$ aus (3) und $z=3a\alpha, x=b\beta, y=c\gamma$ aus (7) folgt

$$\alpha^2bc\cdot 4(x+y)z+\beta^2ca\cdot 4(y+z)x+\gamma^2ab\cdot 4(z+x)y=0.$$

Mit (34), (35), (36) aus Lemma 1 folgt

$$\alpha^2bc\left((3abc)^2-u\right)+\beta^2ca\left((3abc)^2-v\right)+\gamma^2ab\left((3abc)^2-w\right)=0$$
$$\alpha^2bc(3abc)^2-\alpha^2bcu+\beta^2ca(3abc)^2-\beta^2cav+\gamma^2ab(3abc)^2-\gamma^2abw=0$$
$$(3abc)^2(\alpha^2bc+\beta^2ca+\gamma^2ab)-(\alpha^2bcu+\beta^2cav+\gamma^2abw)=0.$$

Die letzte Gleichung ist mit (37) identisch, was zu beweisen war. □

Betrachten wir die Gleichungen (31), (32), (33) und (37) gemeinsam.

$$n^2+(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=-3\alpha\beta\gamma(\alpha^2bc+\beta^2ca+\gamma^2ab), \tag{31}$$
$$m^2+(xyu)^2+(yzv)^2+(zxw)^2=-3\alpha\beta\gamma(\alpha^2bcu^2+\beta^2cav^2+\gamma^2abw^2), \tag{33}$$
$$mn+(xy)^2u+(yz)^2v+(zx)^2w=-3\alpha\beta\gamma(\alpha^2bcu+\beta^2cav+\gamma^2abw), \tag{32}$$
$$(3abc)^2(\alpha^2bc+\beta^2ca+\gamma^2ab)=\alpha^2bcu+\beta^2cav+\gamma^2abw. \tag{37}$$

Mit (31) und (33) haben wir zwei Gleichungen, deren linke Seite jeweils eine *Summe von vier Quadratzahlen* ist. Da nach (17) $u,v,w$ selbst Quadratzahlen sind, ist die linke Seite von (32) hingegen eine Summe von *drei Quadratzahlen und mn*. Gleichung (37) macht eine Aussage darüber, in welchem Verhältnis die anderen drei Gleichungen zueinander stehen. Aus (37) folgt mit (31) und (32)

$$\frac{mn+(xy)^2u+(yz)^2v+(zx)^2w}{n^2+(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2}=(3abc)^2, \tag{38}$$

bzw.

$$\begin{aligned}&mn+(xy)^2u+(yz)^2v+(zx)^2w\\&=(3abc\cdot n)^2+(3abc\cdot xy)^2+(3abc\cdot yz)^2+(3abc\cdot zx)^2.\end{aligned} \tag{39}$$

Somit ist auch die rechte Seite von (32) eine Summe von vier Quadratzahlen.

Mit (7), (26) und $u = 9a^2(3a^2 - \alpha)^2$, $v = b^2(b^2 - \beta)^2$, $w = c^2(c^2 - \gamma)^2$ können wir die Quadrate der linken Seite von (33) wie folgt faktorisieren.

$$\begin{aligned} m^2 &= (3abc \cdot k)^2 = (3abc)^2(k)^2, \\ (xyu)^2 &= \left(b\beta \cdot c\gamma \cdot 9a^2(3a^2-\alpha)^2\right)^2 = (3abc)^2 \left(\beta\gamma 3a(3a^2-\alpha)^2\right)^2, \\ (yzv)^2 &= \left(c\gamma \cdot 3a\alpha \cdot b^2(b^2-\beta)^2\right)^2 = (3abc)^2 \left(\gamma\alpha b(b^2-\beta)^2\right)^2, \\ (zxw)^2 &= \left(3a\alpha \cdot b\beta \cdot c^2(c^2-\gamma)^2\right)^2 = (3abc)^2 \left(\alpha\beta c(c^2-\gamma)^2\right)^2. \end{aligned}$$

Wir können somit alle vier Quadrate von (33) ohne Rest durch $(3abc)^2$ teilen. Nach Division von (33) durch $(3abc)^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & k^2 + \left(\beta\gamma 3a(3a^2-\alpha)^2\right)^2 + \left(\gamma\alpha b(b^2-\beta)^2\right)^2 + \left(\alpha\beta c(c^2-\gamma)^2\right)^2 \\ & \qquad = -\frac{3\alpha\beta\gamma(\alpha^2 bcu^2 + \beta^2 cav^2 + \gamma^2 abw^2)}{(3abc)^2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Nach (37) und (40) ist $(3abc)^2$ sowohl echter Teiler von $(\alpha^2 bcu + \beta^2 cav + \gamma^2 abw)$ als auch $3\alpha\beta\gamma(\alpha^2 bcu^2 + \beta^2 cav^2 + \gamma^2 abw^2)$.

## 2 Bibliographie

1. Fillipi, Andreas: Beitrag im Forum Matroids Matheplanet.
(http://www.matheplanet.de/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=192975)

2. Scheid, Harald: Zahlentheorie. 3.Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u.a. 2003, ISBN 3-8274-1356-6.

## 3 Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit versichere ich, dass diese Arbeit von mir persönlich verfasst wurde und dass ich keinerlei fremde Hilfe in Anspruch genommen habe. Ebenso versichere ich, dass diese Arbeit oder Teile daraus weder von mir selbst noch von anderen als Leistungsnachweise andernorts eingereicht wurden. Wörtliche oder sinngemäße Übernahmen aus anderen Schriften und Veröffentlichungen in gedruckter oder elektronischer Form sind gekennzeichnet. Sämtliche Sekundärliteratur und sonstige Quellen sind nachgewiesen und in der Bibliographie aufgeführt. Das Gleiche gilt für graphische Darstellungen und Bilder sowie für alle Internetquellen.

Mike Winkler, Rosenweg 10, 45739 Oer-Erkenschwick

mike.winkler(at)gmx.de