Über die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung $x^n + y^n = z^n$

MIKE WINKLER

28.04.2014

Zusammenfassung

Der Große Fermatsche Satz besagt, dass die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine nichttriviale Lösung besitzt. Ein Beweis hierfür wurde 1995 von ANDREW WILES[4] erbracht. Diese über 100-seitige Arbeit zählt zu einer der umfangreichsten und kompliziertesten Schriften der Mathematikgeschichte und kann in seiner Gänze nur von einigen wenigen Spezialisten verstanden werden. Es wird gezeigt, dass die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für alle $n > 2$ mittels einer Identität[1] auf die Lösbarkeit des diophantischen quadratischen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} q^2 &= a^2\alpha - b^2\beta - c^2\gamma, \\ pq &= (ad)^2\alpha - (be)^2\beta - (cf)^2\gamma, \\ p^2 &= (ad^2)^2\alpha - (be^2)^2\beta - (cf^2)^2\gamma, \end{aligned}$$

reduziert werden kann, was eine enorm vereinfachte und verkürzte Beweisführung des Großen Fermatschen Satzes ermöglichen könnte.

Inhalt

1 Lemmata

Lemma 1: Sei

$$r = x - y, \qquad s = y + z, \qquad t = z + x,$$

und

$$u = x + y + z, \qquad v = y - z - x, \qquad w = x - y - z,$$

dann gilt mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= r^2(u^4 - 1)(xy)^{n-2} - s^2(v^4 - 1)(yz)^{n-2} - t^2(w^4 - 1)(zx)^{n-2},\\
\mathcal{B} &= 2(ru)^2(xy)^{n-2} - 2(sv)^2(yz)^{n-2} - 2(tw)^2(zx)^{n-2},\\
\mathcal{C} &= r^2(u^4 + 1)(xy)^{n-2} - s^2(v^4 + 1)(yz)^{n-2} - t^2(w^4 + 1)(zx)^{n-2},
\end{aligned}$$

die Identität

$$(8rst)^2(xyz)^{n-2}(x^n + y^n - z^n) = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 - \mathcal{C}^2. \tag{1}$$

Beweis: Setzen wir r, s, t, u, v, w in (1) ein, dann erhalten wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen eine Gleichung mit zwei identischen Seiten. □

Lemma 2: Das diophantische Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
q^2 &= a^2\alpha - b^2\beta - c^2\gamma,\\
pq &= (ad)^2\alpha - (be)^2\beta - (cf)^2\gamma,\\
p^2 &= (ad^2)^2\alpha - (be^2)^2\beta - (cf^2)^2\gamma,
\end{aligned}$$

besitzt mit $d \neq e \neq f \neq 0$ keine ganzzahlige Lösung, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 1$ oder $|\alpha| \neq |\beta| \neq |\gamma| \neq 0$ mit $\alpha|a,\ \beta|b,\ \gamma|c$ und $|\alpha| \neq a,\ |\beta| \neq b,\ |\gamma| \neq c$ gilt.

Beweis: steht noch aus. □

Lemma 3: Die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ besitzt für $n = 3$ und $n = 5$ keine nichttriviale Lösung.

Beweis: Erste Beweise für diese Fälle stammen von Euler, Dirichlet und Legendre. □

2 Ein alternativer Beweis

Satz: Die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ besitzt für $n > 2$ keine nichttriviale Lösung.

Beweis: Es sei (x, y, z) eine nichttriviale ganzzahlige Lösung für ein bestimmtes $n > 2$ von

$$x^n + y^n = z^n. \tag{2}$$

Wir können uns dabei auf Lösungen (x, y, z) mit $ggT(x, y, z) = 1$ beschränken, woraus sofort die paarweise Teilerfremdheit von x, y, z folgt. Von den Zahlen x, y, z ist dann genau eine gerade. Mit einer Lösung (x, y, z) für (2) wird die linke Seite der Identität in (1) gleich Null, so dass

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \mathcal{C}^2 \tag{3}$$

gelten muss. Alle ganzzahligen Lösungen für (3) sind mit ganzen Zahlen p, q mit $p > q > 0$ folgendermaßen darstellbar:

$$\mathcal{A} = p^2 - q^2, \qquad \mathcal{B} = 2pq, \qquad \mathcal{C} = p^2 + q^2.$$

Aus *Lemma 1* folgt damit

$$p^2 - q^2 = r^2(u^4 - 1)(xy)^{n-2} - s^2(v^4 - 1)(yz)^{n-2} - t^2(w^4 - 1)(zx)^{n-2}, \tag{4}$$

$$2pq = 2(ru)^2(xy)^{n-2} - 2(sv)^2(yz)^{n-2} - 2(tw)^2(zx)^{n-2}, \tag{5}$$

$$p^2 + q^2 = r^2(u^4 + 1)(xy)^{n-2} - s^2(v^4 + 1)(yz)^{n-2} - t^2(w^4 + 1)(zx)^{n-2}. \tag{6}$$

Aus Subtraktion von (4) und (6) folgt

$$q^2 = r^2(xy)^{n-2} - s^2(yz)^{n-2} - t^2(zx)^{n-2}. \tag{7}$$

Aus (5) folgt nach Division durch 2

$$pq = (ru)^2(xy)^{n-2} - (sv)^2(yz)^{n-2} - (tw)^2(zx)^{n-2}. \tag{8}$$

Aus Addition von (4) und (6) folgt

$$p^2 = (ru^2)^2(xy)^{n-2} - (sv^2)^2(yz)^{n-2} - (tw^2)^2(zx)^{n-2}. \tag{9}$$

Betrachten wir nun getrennt die Fälle für gerade und ungerade $n > 2$.

Sei $n = 2k + 1$, dann erhalten wir aus (7), (8), (9) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(r(xy)^{k-1}\right)^2 xy - \left(s(yz)^{k-1}\right)^2 yz - \left(t(zx)^{k-1}\right)^2 zx, \\ pq &= \left(ru(xy)^{k-1}\right)^2 xy - \left(sv(yz)^{k-1}\right)^2 yz - \left(tw(zx)^{k-1}\right)^2 zx, \\ p^2 &= \left(ru^2(xy)^{k-1}\right)^2 xy - \left(sv^2(yz)^{k-1}\right)^2 yz - \left(tw^2(zx)^{k-1}\right)^2 zx. \end{aligned} \tag{10}$$

Setzen wir jetzt $a = r(xy)^{k-1}$, $b = s(yz)^{k-1}$, $c = t(zx)^{k-1}$, und $d = u$, $e = v$, $f = w$, und $\alpha = xy$, $\beta = yz$, $\gamma = zx$, dann erhalten wir aus (10) das Gleichungssystem von *Lemma 2*. Für die Nichtexistenz ganzzahliger Lösungen muss $d \neq e \neq f \neq 0$ und $|\alpha| \neq |\beta| \neq |\gamma| \neq 0$ und $\alpha|a,\ \beta|b,\ \gamma|c$ und $|\alpha| \neq a,\ |\beta| \neq b,\ |\gamma| \neq c$ gelten.

Gemäß *Lemma 1* ist $r = x - y,\ s = y + z,\ t = z + x$ und $u = x + y + z,\ v = y - z - x,\ w = x - y - z$. Überprüfen wir damit die Voraussetzungen von *Lemma 2*.

Wir können für eine nichttriviale ganzzahlige Lösung (x, y, z) von (2) voraussetzen, dass $|x| \neq |y| \neq |z| \neq 0$ ist.

Aus $|x| \neq |y| \neq |z| \neq 0$ folgt $x + y + z \neq y - z - x \neq x - y - z \neq 0$. Somit gilt $u \neq v \neq w \neq 0$ und auch $d \neq e \neq f \neq 0$.

Aus $|x| \neq |y| \neq |z| \neq 0$ folgt $|xy| \neq |yz| \neq |zx| \neq 0$ und damit auch $|\alpha| \neq |\beta| \neq |\gamma| \neq 0$.

Für alle $k > 1$ ist $xy|r(xy)^{k-1}, yz|s(yz)^{k-1}, zx|t(zx)^{k-1}$ und damit auch $\alpha|a,\ \beta|b,\ \gamma|c$.

Aus $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(x, y, z) = 1$ und $|x| \neq |y| \neq |z| \neq 0$ folgt $x - y \neq y + z \neq z + x \neq 0$ und damit $r \neq s \neq t \neq 0$. Für alle $k > 2$ ist dann $|xy| \neq r(xy)^{k-1}, |yz| \neq s(yz)^{k-1}, |zx| \neq t(zx)^{k-1}$ und damit auch $|\alpha| \neq a,\ |\beta| \neq b,\ |\gamma| \neq c$.

Da somit für alle $k > 2$ die Voraussetzungen von *Lemma 2* erfüllt sind, folgt direkt, dass (10) für alle $k > 2$ keine nichttriviale ganzzahlige Lösung (p, q, x, y, z) besitzt.

Sei $n = 2k$ mit $k > 1$, dann erhalten wir aus (7), (8), (9) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
q^2 &= \left(r(xy)^{k-1}\right)^2 - \left(s(yz)^{k-1}\right)^2 - \left(t(zx)^{k-1}\right)^2 , \\
pq &= \left(ru(xy)^{k-1}\right)^2 - \left(sv(yz)^{k-1}\right)^2 - \left(tw(zx)^{k-1}\right)^2 , \\
p^2 &= \left(ru^2(xy)^{k-1}\right)^2 - \left(sv^2(yz)^{k-1}\right)^2 - \left(tw^2(zx)^{k-1}\right)^2 . \qquad (11)
\end{aligned}$$

Für (11) gelten dieselben Bedingungen wie für (10), nur dass $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ist. Damit sind auch hier für alle $k > 1$ die Voraussetzungen von *Lemma 2* erfüllt, woraus direkt folgt, dass (11) für alle $k > 1$ keine nichttriviale ganzzahlige Lösung (p, q, x, y, z) besitzt.

Demnach kann (2) unter der Prämisse von *Lemma 3* für alle $n > 2$ keine nichttriviale Lösung (x, y, z) besitzen, womit der *Satz* bewiesen ist. □

3 Bibliographie

1. Fillipi, Andreas: Beitrag im Internet-Forum Matroids Matheplanet. (http://www.matheplanet.de/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=192975)

2. Scheid, Harald: Zahlentheorie. 3.Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u.a. 2003, ISBN 3-8274-1356-6.

3. Wikipedia: Großer fermatscher Satz.

4. Wiles, Andrew: Modular Elliptic Curves and Fermat's last theorem. Annals of Mathematics 142 (1995), S. 443–551. (http://math.stanford.edu/ lekheng/flt/wiles.pdf)

4 Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit versichere ich, dass diese Arbeit von mir persönlich verfasst wurde und dass ich keinerlei fremde Hilfe in Anspruch genommen habe. Ebenso versichere ich, dass diese Arbeit oder Teile daraus weder von mir selbst noch von anderen als Leistungsnachweise andernorts eingereicht wurden. Wörtliche oder sinngemäße Übernahmen aus anderen Schriften und Veröffentlichungen in gedruckter oder elektronischer Form sind gekennzeichnet. Sämtliche Sekundärliteratur und sonstige Quellen sind nachgewiesen und in der Bibliographie aufgeführt. Das Gleiche gilt für graphische Darstellungen und Bilder sowie für alle Internetquellen.

Mike Winkler, Rosenweg 10, 45739 Oer-Erkenschwick

mike.winkler(at)gmx.de